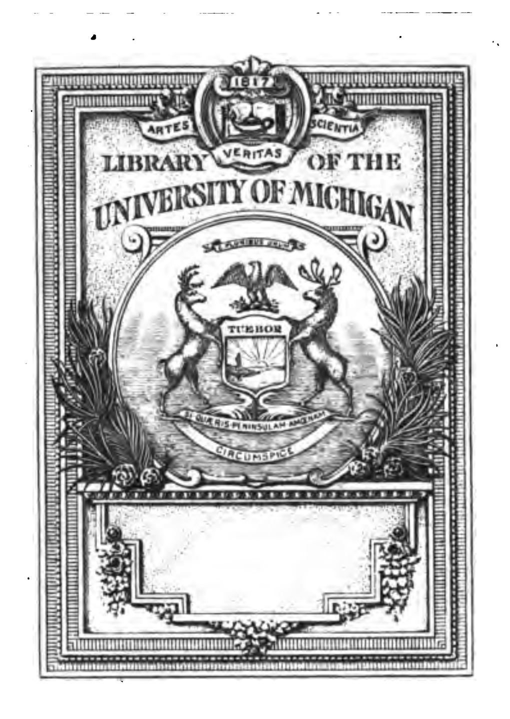
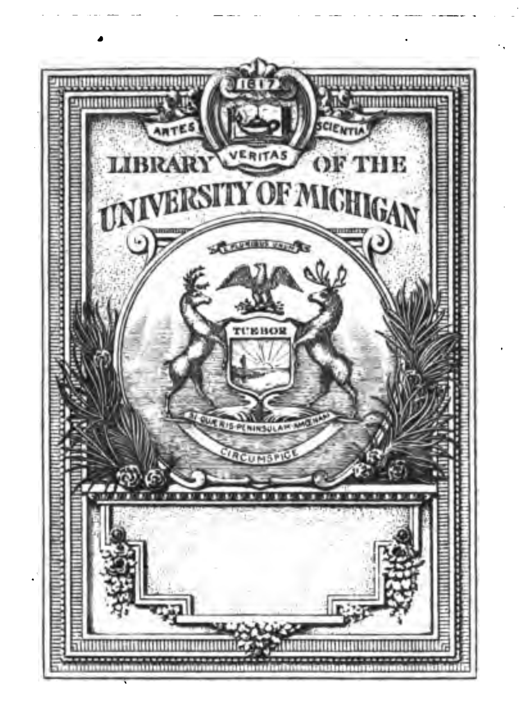

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

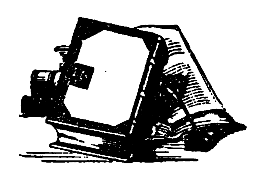
NOCIONES

DE

CÁLCULO INFINITESIMAL

POR

FRANCISCO ECHEAGARAY.



MEXICO.

IMPRENTA HIJAS DE J. F. JENS, SAN JOSÉ EL REAL 22.

Tercera Calle Sur números 41 y 43.

1897.



C. de Vd., Febrero 20 de 1897.

Sr. Lic. D. Vidal de Castañeda y Nájera, Director de la Escuela Nacional Preparatoria. — Presente. — Señor Director: Al tener el honor de consultar con Vd. acerca de la elección de textos para la clase de Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal, convino Vd. conmigo en que más bien que extractar obras arregladas para cursos anuales, sería preferible escribirlas *ad hoc* para los cursos semestrales que se siguen en la Escuela Preparatoria, siempre que dichas obras contuvieran lo esencial de la materia que tratasen, y ésta se expusiera con método, claridad y precisión.

En tal virtud, Sr. Director, he emprendido el trabajo de arreglar para cursos semestrales unas nociones de las materias indicadas, que en estos días verán la luz pública, tomándome la libertad de ofrecer á Vd. la dedicatoria de mis dos libros, que espero se dignará aceptar.

Su muy adicto servidor y amigo.—*Francisco Echeagaray.*

C. de Vd., Febrero 23 de 1897.

Sr. Don Francisco Echeagaray. — Presente. — Muy estimado amigo: Mucho agradezco la dedicatoria que ha hecho para mí en sus obras de TERCER CURSO DE MATEMÁTICAS, según lo manifiesta en su atenta fecha 20 del presente.

Deseo que con dichas obras se consiga el propósito que Vd. se ha formado y lo felicito por su trabajo.

Con el afecto de siempre me repito su amigo y atento S. S.—*V. de Castañeda y Nájera.*

INTRODUCCION.

En el Álgebra y Geometría elementales, se razona con cantidades finitas y determinadas; en el Análisis infinitesimal, al contrario, se abandonan los elementos verdaderos para considerar cantidades auxiliares, de una pequeñez indefinida, y cuyas dimensiones no se limitan, lo cual deja una impresión vaga é incierta. No solamente esas cantidades quedan indecisas, sino que las relaciones que entre ellas se establecen, no parecen perfectamente rigorosas, porque se opera como si dichas relaciones pudieran ser reemplazadas por otras que difieren realmente.

Hay que distinguir el método infinitesimal del cálculo infinitesimal, y no atribuir al segundo lo que es inherente al primero.

El cálculo infinitesimal es rigorosamente algebráico: tiene por objeto calcular los límites de las relaciones y los límites de las sumas; es decir, encontrar los valores fijos hacia los cuales convergen las relaciones ó las sumas de cantidades variables, á medida que decrecen indefinidamente según cierta ley. La investigación de las funciones derivadas y las integrales es una continuación del Álgebra común.

El método infinitesimal es el arte de aplicar el cálculo á la solución de los problemas que no pueden resolverse ó determinarse directamente, y en los cuales se consideran las cantidades como límites de relaciones ó de sumas de otras cantidades infinitamente pequeñas, de naturaleza más simple y cuyos límites se pueden obtener por procedimientos generales de diferenciación y de integración.

El método infinitesimal es el complemento del de Descartes, natural, científico por excelencia, y no solo la Matemática aún en sus partes elementales lo emplea, sino también la Física, la Química y la Mecánica. Si el valor científico del método infinitesimal es incuestionable, su valor lógico es de grandísima importancia; cultiva admirablemente la inducción, constantemente se tiene necesidad de hacer grandes generalizaciones mediante el empleo de dicho método.

Adoptamos el método de los límites de Newton, pero nos servimos también del método de los infinitamente pequeños de Leibnitz. Este último sabio establece las reglas del cálculo de los infinitamente pequeños sobre este principio, que se puede tomar una por otra dos magnitudes finitas, que no difieren entre sí más que en una cantidad infinitamente pequeña. El autor de las leyes de la gravedad, funda su método de los límites, que simplifica el de exhaustación de los antiguos, en el siguiente principio: Si existe una relación entre magnitudes variables que convergen simultáneamente hacia límites fijos, ésta relación deberá subsistir para estos límites.

La geometría elemental demuestra propiedades que convienen á las magnitudes comensurables y las hace en seguida extensivas á las magnitudes inconmensurables, ó

bien para la medida de las figuras terminadas por líneas ó superficies curvas, se sirve de la medida de las figuras terminadas por líneas ó superficies planas, mediante el empleo del método infinitesimal ú otro equivalente.

Los razonamientos que se emplean para vencer las dificultades que presentan estas cuestiones, á saber el paso de lo finito á lo infinito, encierran las mismas ideas fundamentales.

La concepción newtoniana, salvo la forma, es la leibniciana, porque afirmar que una curva puede considerarse como límite de un polígono inscrito ó circunscrito á ella, equivale á decir que un polígono de un número infinito de lados, infinitamente pequeños produce una curva. Lo que se dice en el terreno puramente geométrico ó concreto, puede asegurarse en el terreno abstracto, y tanto más, cuanto que toda función puede representarse por una curva.

Las consideraciones anteriores se comprenderán bien al entrar ya en el estudio de la materia, no perdiendo de vista lo que corresponde al método y lo que corresponde al cálculo. Ya se verá la manera sistemática como se introducen las cantidades auxiliares propias del cálculo infinitesimal con el fin de facilitar el establecimiento de las ecuaciones entre los diversos elementos de una cuestión, proporcionando en seguida medios para eliminar las auxiliares, á fin de obtener la solución algebráica, que directamente ó por los medios comunes del Álgebra, se hubiera dificultado mucho, ó no se hubiera alcanzado.

Los textos de cálculo infinitesimal están arreglados para cursos anuales, y se necesita un texto que sin carecer de lo esencial, esté arreglado para cursos semestrales, conforme á lo dispuesto por la nueva ley de instrucción,

y el presente trabajo llena, en nuestro concepto, la necesidad indicada.

Novedad en un tratado elemental, en unas nociones, no se puede pedir, sino es la de que á pesar de ser breve y suscinto, conserve en toda su plenitud el rigor científico y la claridad que en punto á demostraciones, conviene á las ciencias exactas. Encadenar y establecer con rigor científico los teoremas que forman las presentes nociones, trabajo fué del eminente matemático J. B. Belanger, de cuya excelente obra están tomados en su mayor parte estos apuntes. Respecto de la parte modificada hemos procurado seguir igual órden en las proposiciones y el mismo rigor científico en las demostraciones, y teniendo en cuenta el fin principal de la Geometría, hemos dado las auxiliares de un arco de curva plana, de una area plana, de una superficie y de un volúmen de revolución, haciendo aplicaciones útiles y proponiendo cuestiones que sirvan de estímulo y utilidad á los alumnos.

CAPITULO I.

I. § Determinación de la tangente según la ecuación de la curva.

1. Tomemos desde luego un ejemplo y busquemos la tangente á la curva, cuya ecuación es

$$y=\frac{x^3}{a^2}$$

El punto M de contacto (Fig. 1) dado sobre la curva teniendo por coordenadas O P=X, P M=y, sea $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, las coordenadas del punto M', inmediato á M, también sobre la curva, de suerte que Δx y Δy sean los aumentos PP', Q M', que toman simultáneamente las coordenadas x e' y cuando se pasa del punto M al punto M'

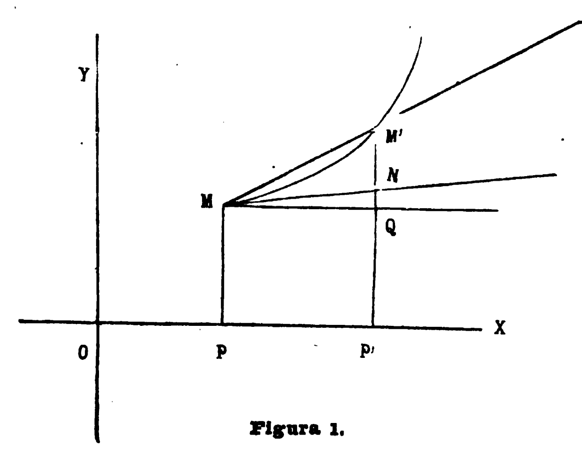


Figura 1.

La relación

$$\frac{M'Q}{M\,Q}=\frac{M'Q}{PP'}=\frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

dará la inclinación de la secante MM' sobre el eje de las

x si las cordenadas son rectangulares. Se deduce de la ecuación de la curva, á la cual deben satisfacer las coordenadas $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, del punto M',

$$y+\Delta y=\frac{(x+\Delta x)^3}{a^2}=\frac{1}{a^2}(x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3)$$

restando $y=\frac{1}{a^2}x^3$ y dividiendo por Δx, se tiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\text{inclinación de la secante sobre el eje de las } x$$

$$=\frac{3x^2}{a^2}+\frac{3x\Delta x}{a^2}+\frac{\Delta x^2}{a^2}$$

Esta inclinación (ó tangente trigonométrica del ángulo M' M Q) depende como debe ser, de la abscisa x del punto M y del incremento Δx. A medida que Δx disminuya el primer miembro tiende á aproximarse á $\frac{3x^2}{a^2}$ que es por consecuencia su límite. Lo que se comprende asignando á Δx valores decrecientes tales como $\frac{x}{100}$, $\frac{x}{1000}$....
Pero este límite siendo el de inclinación de la secante, es el de inclinación de la tangente sobre el eje de las x: (*) luego

$\lim \frac{\Delta Y}{\Delta x}$ = inclinación de la tangente sobre el eje de las x.

Este ejemplo dá una idea del método que se tiene que seguir en general para determinar la tangente á una curva, conociendo la ecuación de esta curva.

2. La notación $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ se reemplaza por $\frac{dy}{dx}$, expresión que puede considerarse bajo tres aspectos diferentes.

(*) Se considera la tangente como una secante que pasa por dos puntos infinitamente próximos de una curva, ó como el límite de las posiciones de una secante que gira al rededor de un punto fijo, quedando variable el otro hasta que se confunda con el primero. El segundo modo de considerar la tangente es más general que el primero y establece una íntima relación entre las figuras rectilíneas y las curvilíneas, pudiéndose averigüar la forma de una curva por la investigación de la ley de las direcciones de los lados del contorno poligonal.

1° $\frac{dy}{dx}$ puede considerarse como una simple notación equivalente á lim $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que significa límite de relación de los aumentos simultáneos de x y de y á medida que estos aumentos se aproximan á cero. Bajo este punto de vista dy y dx no son dos cantidades: $\frac{dy}{dx}$ es una sola; $\frac{dx}{dy}$ es su inversa, es decir lim $\frac{\Delta x}{\Delta y}$.

2° Se pueden considerar dx y dy como aumentos, que es necesario dar á x y á y para pasar del punto M de la curva á otro punto N de la tangente en M. En este caso, dy y dx son dos cantidades ligadas la una á la otra por una relación determinada, pero son arbitrarias. Se puede entónces escribir indiferentemente

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{a^2}, \text{ ó } dy=\frac{3x^2}{a^2}dx, \text{ ó } a^2dy=3x^2dx.$$

Bajo este segundo punto de vista se puede hacer $\Delta x = dx$, y las tres cantidades dx, Δy. dy, serán los incrementos simultáneos de la abscisa, de la ordenada de la curva y de la ordenada de la tangente. Así por ejemplo se tendrá (Fig. 1) al mismo tiempo.

$$PP'=dx, \quad M'Q=\Delta y, \quad NQ=dy.$$

Las dos relaciones $\frac{\Delta y}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, siendo la segunda el límite de la primera, tienen una diferencia que decrece, tanto cuanto se quiera, á medida que dx disminuye así se puede poner

$$\frac{\Delta y}{dx}=\frac{dy}{dx}+\alpha,$$

α cantidad dependiente de dx, pudiendo quedar tan pequeña cuanto se quiera á medida que dx disminuya. Resulta que á medida que las cantidades Δy, dy, decrecen

por causa de la diminución de $d\,x$, la relación de $\Delta\,y$ á $d\,y$, se aproxima tanto cuanto se quiera á la unidad, porque la ecuación anterior dá

$$\frac{\Delta\,y}{d\,y}=1+\alpha\,\frac{d\,x}{d\,y}.$$

El tercer modo de considerar $d\,y$ y $d\,x$, es una consecuencia de las observaciones precedentes. Se pueden asignar á $d\,x$ un grado tal de pequeñez, que $d\,y$ pudiese, sin temor de error en las aplicaciones ó en las consecuencias que se obtengan, tomarse por $\Delta\,y$ ó recíprocamente. A éste, y á un grado inferior de pequeñez, los incrementos $d\,x$ y $d\,y$ se llaman infinitamente pequeños, y $d\,y$ puede entónces considerarse indiferentemente, y según la necesidad de la cuestión de que se trate, como el aumento de la ordenada de la curva ó de la ordenada de la tangente. Consideradas bajo este punto de vista, los aumentos simultáneos $d\,x$ y $d\,y$ se llaman diferenciales de las variables x é y.

3. Cuando dos cantidades variables están ligadas de tal manera, que dándose el valor de una de ellas, se pueda determinar el valor correspondiente de la otra, se dice que cada una de las variables es función de la otra.

Si y se expresa inmediatamente, como en las ecuaciones siguientes:

$$y=a\,x,\ y=\frac{a}{x},\ y=x^a,\ y=A^x,\ y=a\log x,\ y=a\,\mathrm{sen}\,x,$$

se dice que y es una función explícita de x, y se emplean las notaciones $y=f(x)$, $y=F(x)$.

Si se dá solamente una relación entre y, y x, por ejemplo una ecuación que se verifique por las dos variables; la función se llama implícita, cuando no se expresa inmediatamente por la otra variable.

$$\text{Ejemplo: } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Una relación de este género se escribe así en general:

$$f[x, y]=o, \; F[x, y]=o.$$

En los anteriores ejemplos, *x* es función implícita de *y*. Una función implícita se convierte en explícita, resolviendo la ecuación. Por ejemplo, se obtiene de las ecuaciones precedentes

$$x=\frac{y}{a}, \; x=\frac{a}{y}, x=y^{\frac{1}{a}}, \; x=\frac{\log y}{\log A}, \; x=10^{\frac{y}{a}}$$

$$x=\text{arc}\left[\text{sen}=\frac{y}{a}\right], \; y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

4. Toda función puede representarse por una curva, lo que hace presentir la gran utilidad de la investigación de las tangentes á las curvas como medio de reconocer la variación de una función en la proximidad de uno de sus valores particulares. En general siendo *y* una función de *x* designada por F (*x*), la cantidad $\frac{dy}{dx}$ es otra que se designa por F' (*x*), y que se llama la derivada de F (*x*). El producto F' (*x*) *d x* se llama la diferencial de F (*x*). La investigación del coeficiente de inclinación ó angular $\frac{dy}{dx}$ de las curvas ó de la derivada de una función cualquiera es el primer objeto del cálculo diferencial *y*, tiene aplicaciones muy importantes en Mecánica.

5. Cuando dos variables *y* y *x* están ligadas la una á la otra, puede considerarse unas veces la derivada $\frac{dy}{dx}$ de *y* con relación á *x*, otras la derivada $\frac{dx}{dy}$ de *x* con relación á *y*. Pero es claro que estas dos cantidades son inversas la una de la otra, porque las relaciones

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$$

subsiste cuando los dos factores de este producto se aproximan á sus límites por el decrecimiento simultáneo de Δx y Δy, luego:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1.$$

§ II. Diferenciación de las funciones fundamentales.

$$x^m, \frac{1}{x}, \text{sen } x,$$

6. Sea $y = x^m$, (1) suponiendo que m sea entero.

En esta ecuación y en las siguientes x é y son números y representan las coordenadas de una curva, tomándose una línea por unidad. Las diversas curvas que se obtienen variando esta unidad son semejantes.

Se tiene por la fórmula de Newton

$$y + \Delta y + (x \text{ t } \Delta x)^m = x^m + m\, x^{m-1} \Delta x + k\, x^2 \ldots . (2)$$

k es un polinomio, cuyo primer término es

$\frac{m(m-1)\, x^{m-2}}{1.\ 2}$ y los otros tienen Δx por factor.

Las ecuaciones (1) y (2) dan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m\ x^{m-1} + k\, \Delta x.$$

de donde $\lim \frac{\Delta y}{\Delta}$ ó $\frac{dy}{dx} = m\, x^{m-1}$

ó $dy = m\, x^{m-1}\, dx$;

es decir que la diferencial de una potencia de x se obtie-

ne disminuyendo el exponente de una unidad y multiplicando por el exponente primitivo y por la diferencial dx.

Sea $y=\frac{1}{x}$

Se tiene $y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}$,

de donde $\Delta y=\frac{-\Delta x}{x^2+x\Delta x}$; $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x^2+x\Delta x}$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ ó } \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}dx$$

de donde $$d\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}dx$$

Las diferenciales son de signo contrario, porque y disminuye cuaddo x aumenta.

Sea $y=\log x$

tomando el logaritmo en un sistema cualquiera. Si se cambia x en $x+\Delta x$, é y en $y+\Delta y$, resulta

$$y+\Delta y=\log(x+\Delta x),$$

y restando miembro á miembro y dividiendo en seguida por Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}=\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

Si tiende Δx hacia cero, el numerador tiende hácia log 1, que es tambien igual á cero. Para evitar la forma $\frac{0}{0}$, se puede hacer decrecer á Δx de tal manera que sea siempre una parte alícuota de x; es decir que se puede suponer $\Delta x=\frac{x}{m}$, m puede crecer indefinidamente. Se tendrá:

Oct. 3 / 19..

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\frac{x}{m}}=\frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}{x}.$$

Para que $\Delta\, x$ tienda hácia o, m debe tender hácia el infinito, el numerador del segundo miembro, tiende hácia el límite del logaritmo de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ para m infinito ó lo que es igual, hácia el logarítmo del límite de $\left(\frac{1+1}{m}\right)^m$. Pero se demuestra en álgebra que este límite es el número

$$e=2.718281828 \ldots,$$

base de los logarítmos neperianos; quedará pues

$$\lim. \frac{\Delta y}{d x} \text{ ó } \frac{d y}{d x}=\frac{\log e}{x}, \quad dy=\log e \frac{dx}{x}.$$

ó

$$d. \log x=\log e. \frac{dx}{x}.$$

Si los logaritmos son neperianos, log e, será igual á la unidad, y se tendrá simplemente

$$dy=\frac{dx}{x}$$

A la expresión $\frac{dx}{x}$, se le llama diferencial de log x.

Sea

$$y=\text{sen } x$$

Se tiene

$$y+\Delta y=\text{sen }(x+\Delta x)$$

y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{sen }(x+\Delta z)-\text{sen } x}{\Delta x}$$

de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2 \text{ sen } \frac{1}{2}\Delta x, \cos (x+\frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$$

que se puede escribir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}.\cos(x+\tfrac{1}{2}\Delta x)$$

Si se hace tender Δx hacia cero, la relación $\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$ tiende hacia la unidad (*); y el segundo factor tiende hacia cos x. Queda pues

$$\text{lim.}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dx}{dx}=\cos x$$

ó

$$d.\ \text{sen}\ x=\cos x.\ dx.$$

§ III. Teoremas y reglas para diferenciar todas las funciones con la ayuda de las diferenciales fundamentales.

8. **Diferenciación de una función de función.** Expliquemos esta locución con un ejemplo.

Sea

$$y=(\log x)^m.$$

Para obtener y cuando se conoce x, se necesita desde luego calcular log x, función fundamental de x, en seguida elevar log x á la potencia m, es decir, considerar y como una función fundamental de log x.

Sea en general

$$y=F(u)\ \ y\ \ u=f(x),$$

lo que se indica tambien por la notación

$$y=F[f(x)].$$

(*) A medida que decrece un arco menor que 90, la relación que hay entre el arco rectificado y su seno disminuye, aproximándose más y más á la unidad, que es su valor límite.

y, en lugar de ser directamente función de x. es función de la variable intermediaria u, que es ella misma función de x. Se dice entonces que y es una función de función.

Para diferenciar y relativamente á la variable x, supongamos que ésta tome un incremento Δx, al cual corresponden los incrementos Δu y Δy de u, y de y. Se tendrá entre estas tres cantidades la relación

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

Pero, á medida que Δx decrece, Δu y Δy se aproximan también á cero; y las tres relaciones se aproximan simultáneamente á sus límites respectivos $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{du}$, y $\frac{du}{dx}$ la ecuación subsiste siempre.

Se tiene pues

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

que expresa que la derivada de y con relación á x es igual á la derivada de y con relación á la función intermediaria u, multiplicada por la derivada de u con relación á x. Multiplicando por dx se obtiene la diferencial de y.

Si por ejemplo se tiene

$$y=\log u, \quad u=x^m.$$

se deduce

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log e}{u}\cdot mx^{m-1}=\frac{\log e.\ m\,x^{m-1}}{x^m}=\frac{m\log e}{x}.$$

y por consiguiente

$$dy=m.\log e\frac{dx}{x}.$$

Si y, y x están relacionadas por las ecuaciones

$$y=F(u), \quad x=f(u)$$

se demostraría fácilmeute

$$\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{\frac{d\,y}{d\,u}}{\frac{d\,u}{d\,x}}=\frac{F'(u)}{f'(u)}$$

9. En lugar de una función intermediaria podría haber varias. Se puede tener, por ejemplo

$$y=f\,(u),\ u=\varphi\,(v)\ y\ v=\psi\,(x)$$

Si x varía Δx, v variará Δv; por consiguiente, u variará Δu y Δy. Se tiene la identidad

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

y en el límite

$$\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{d\,y}{d\,u},\ \frac{d\,u}{d\,v}\cdot\frac{d\,v}{d\,x}.$$

es decir que, para obtener la derivada de y con relación á x, es necesario tomar la derivada de y con relación á u, multiplicar por la derivada u con relación á v y por la derivada de v con relación á x.

Multiplicando en seguida por dx, se obtendrá la diferencial de y.

Si se tiene por ejemplo:

$$y=\log u,\ u=v^{m},\ v=\text{sen } x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log.\,u}{u}.\ m\ v^{m-1}\ \cos.\,x=\frac{m\log e\,(\text{sen } x)^{m-1}\cos x}{(\text{sen } x)^{m}}$$

de donde

$$dy=\frac{m\ \log.\,e}{\text{sen.}\ x}\cos x\ dx=m\ \log.\,e\ \cot.\,x\ dx$$

10. *Funciones compuestas*. Diferencial de una suma. Sea:

$$y=u+v+\ldots\ldots..,$$

u, v,........, siendo funciones de x. Se tendrá evidentemente entre los aumentos simultáneos de estas cantidades, la ecuación

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}+\ldots\ldots\ldots,$$

por consecuencia

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\ldots\ldots\ldots,$$

ó

$$dy=du+dv+\ldots\ldots\ldots,$$

Teorema. La diferencial de una suma de varias funciones es la suma de las diferenciales de estas funciones.

11.—Notas. 1ª Si uno de los términos de la suma fuese constante, este término desaparecería evidentemente en la diferenciación. Lo que quiere decir que la diferencial de una constante es cero.

2ª. Si uno de los términos es simplemente la variable independiente x, la diferencial de este término es dx y su derivada es 1.

12. Teorema. La diferencial del producto de una función por un coeficiente constante es igual á la diferencial de la función afectada del mismo coeficiente.

Esta proposición que se podría considerar como un corolario de la anterior se puede demostrar á priori facilmente. Sea

$$y=a\,F\,[x].$$

Se tiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a\,\frac{F\,[x+\Delta x]-F\,[x]}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=a\,\lim.\frac{F\,[x+\Delta x]-[x]}{\Delta x}=a\,F'\,[x]$$

13. Diferencial de un producto de dos funciones. Sea

$$y = u\,w,\ u = F\,[x]\ \text{y}\ v = f\,[x]$$

Sean los incrementos finitos simultáneos Δx, Δv, Δu y Δy. Se tiene

$$y + \Delta\,y = [u + \Delta\,u]\,[v + \Delta\,w]$$

de donde

$$\frac{\Delta\,y}{\Delta\,x} = u\,\frac{\Delta\,w}{\Delta\,x} + v\,\frac{\Delta\,u}{\Delta\,x} + \frac{\Delta\,u}{\Delta\,x}.\ \frac{\Delta\,w}{\Delta\,x}.\ \Delta\,x$$

Pero, á medida que Δx decrece las relaciones $\frac{\Delta\,y}{\Delta\,x}$, $\frac{\Delta\,\omega}{\Delta\,x}$ y $\frac{\Delta\,u}{\Delta\,x}$, se aproximan á sus límites $\frac{d\,y}{d\,x}$, $\frac{d\,\omega}{d\,x}$ ó $f'(x)$, y $\frac{d\,u}{d\,x}$ ó F' (x), mientras que el producto $\frac{\Delta\,u}{\Delta\,x}.\ \frac{\Delta\,\omega}{\Delta\,x}\Delta\,x$, se aproxima á cero.

Luego $$\frac{d\,y}{d\,x} = u\,\frac{d\,\omega}{d\,x} + v\,\frac{d\,u}{d\,x}.$$

ó simplemente

$$d.\,u\,\omega = u\,d\,\omega + \omega\,d\,u$$

se tendrá en cuenta que la diferencial de una función no es otra cosa que la derivada de esta función multiplicada por la diferencial de la variable independiente.

Este resultado general se enuncia así:

Teorema. La diferencial de un producto es igual á la suma de los resultados que se obtienen por la diferenciación que se hace, considerando sucesivamente cada factor como variable y el otro como constante.

Este teorema se aplica á cualquier número de factores.

En el producto $u\,v\,z$, se considera como $(u\,v)\,z$ y se tiene

$$d\,u\,v\,z = u\,v\,d\,z + z\,d\,u\,v$$

pero $$d\,u\,v = u\,d\,v + v\,d\,u$$

luego $$d\,u\,v\,z = u\,v\,d\,z + u\,z\,d\,v + v\,z\,d\,u$$

14. El mismo teorema se aplica á un cociente, teniendo en cuenta el N° (2).

Porque $$\frac{u}{v} = u\frac{1}{v}$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{1}{v}du + u\,d\frac{1}{v} = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

Podría decirse que la diferencial de un cociente es igual al denominador por la diferencial del numerador, menos el numerador por la diferencial del denominador, y partida la diferencia por el cuadrado del denominador.

15. *Regla general de la diferenciación de las funciones compuestas.*

Los teoremas precedentes sirven para las necesidades del cálculo diferencial. Sin embargo conviene conocer una proposición muy notable y muy general.

Sea $y = F(u\ v)$, es decir la función F de u y de v, las cantidades u y v son funciones de una variable independiente x.

Para llegar á la derivada $\frac{dy}{dx}$ demos á x un incremento finito $\triangle x$; las funciones u, v é y se incrementan simultáneamente en $\triangle u$, $\triangle v$ y $\triangle y$ y se tiene

$$\triangle y = F(u + \triangle u, v + \triangle v) - F(u, v)$$

Supongamos que en lugar de incrementar simultáneamente u y v en la función compuesta y, se comienza por incrementar solamente una de las dos funciones u, se tendrá
$$F(u + \triangle u, v)$$

Esta cantidad se considera naturalmente en la expresión $\triangle y$, que toma la forma

$$\triangle y = F(u + \triangle u, v) - F(u, v)$$

$$+ F(u + \triangle u, v + \triangle v) - F(u + \triangle u, v)$$

por consecuencia

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{F}(u+\Delta u, v)-\mathrm{F}(u, v)}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$+\frac{\mathrm{F}(u+\Delta u, v+\Delta v)-\mathrm{F}(u+\Delta u, v)}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Pasemos á los límites hácia los cuales tienden estas cantidades, á medida que los incrementos Δx, Δu, Δv, y Δy se aproximan á cero. Los límites $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ son las derivadas designadas, según las convenciones, por

$$\frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dx} \text{ y } \frac{dy}{dx}$$

El límite de la relación

$$\frac{\mathrm{F}(u+\Delta u, v)-\mathrm{F}(u, v)}{\Delta u}$$

es la derivada con relación á u, de la función F (u, v) en la cual no se hace más que variar á u, considerando á v como una constante. Es lo que se llama la derivada parcial de F (u, v) con relación á u. Se la designa por $\mathrm{F}'_u(u, v)$, ó por $\frac{dy}{du}$, teniendo presente que se considera el numerador dy como un incremento infinitamente pequeño de y, que corresponde á la variación infinitamente pequeña de u solamente, y no á las variaciones simultáneas de u y de v.

En fin, notemos que en la relación

$$\frac{\mathrm{F}(u+\Delta u, v+\Delta v)-\mathrm{F}(u+\Delta u. v)}{\Delta v}$$

el numerador es el aumento que toma F $(u+\Delta u, v)$ cuando crece v, Δv. En consecuencia, si se hace variar solamente Δv y se aproxima á cero, se tendrá para límite de la fracción en esta hipótesis, la derivada con relación á v de la función F $(u+\Delta u, v)$, y para tener el límite hácia la

cual se apróxima la fracción cuando Δu y $v\,\Delta$ disminuyen á la vez, no queda más que hacer $\Delta u = 0$ en $F_v'\,(u + \Delta u,\, v)$, lo que dá $F'_v\,(u,\, v)$ ó $\frac{dy}{dv}$ derivada parcial de $F\,(u,v)$ ó de y con relación á v.

Igualando los límites de los dos miembros de la ecuación (1), se obtiene la derivada total de y, á saber

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

ó lo que es lo mismo

$$dy=\frac{dy}{du}\cdot du+\frac{dy}{dv}\cdot dv$$

La fórmula precedente, que se puede hacer extensiva á cualquier número de funciones compuestas, se enuncia así:

Teorema. *La diferencial de una función compuesta es igual á la suma de los resultados que se obtienen considerando sucesivamente cada función compuesta como variable y las otras como constantes.*

$$\text{Sea}\quad y=\frac{x^m \text{ sen.}^2 x}{1-\log.\, x}.\quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

que se puede poner bajo la forma

$$y=\frac{u\,v}{z},\ dy=\frac{z\,v\,du+z\,u\,dv-u\,v\,dz}{z^2}$$

$$u=x^m,\ v=\text{sen.}^2 x \text{ y } z=1-\log.\, x$$

$$du=m\,x^{m-1}\,dx,\ dv=2\text{ sen. } x \cos.\, x\, dx=\text{sen. } 2\, x\, dx$$

$$dz=-\frac{\log. e}{x}\,dx$$

No queda más que sustituir.

10. *Diferenciación de las funciones implícitas.* Dos cantidades variables son funciones implícitas la una de la otra, cuando están ligadas por una ecuación que indica determinadas operaciones entre estas cantidades.

Ejemplos: 1° $\log. y = \text{sen.}\, x$

2° $y^3 = a x y + x^3$

En cada caso y es en realidad una función de x, aunque no expresada explícitamente. Cada miembro es, pues, ó función inmediata de x como sen.x, ó función de función de x, como log. y ó y^3, ó función de varias funciones de x, como $ax\, y + x^3$. Pero cuando dos funciones de una misma variable x son iguales, aunque diferentemente expresadas, sus derivadas y sus diferenciales, con relación á esta variable, son necesariamente iguales.

De aquí el medio de deducir de una ecuación, como las anteriores, la expresión en x é y de la derivada $\frac{dy}{dx}$ ó de su inversa.

1° De $\log. y = \text{sen.} x$ se infiere

$$\frac{\log. e\, dy}{y} = \cos.\, x.\, dx$$

2° De $y^3 = a x y + x^3$

$$3\, y^2\, dy = ax\, dy + ay\, dx + 3\, x^2\, dx$$

De cada una de estas ecuaciones diferenciales se obtiene sea $\frac{dy}{dx}$ ó $\frac{dx}{dy}$ operando como si dy y dx fuesen cantidades finitas.

Teorema. En general se determinan los valores $\frac{dy}{dx}$ ó $\frac{dx}{dy}$ de una ecuación en x, y, diferenciando los dos miembros, segun las reglas de las funciones de funciones.

Si la relación de x á y fuese implícitamente expresa-

da por dos ecuaciones, entre estas dos cantidades y una tercera variable z, como

$$F(x, y, z)=0 \text{ y } f(x, y, z)=0$$

para encontrar $\frac{dy}{dx}$ bastará diferenciar estas ecuaciones con relación á la variable x, segun la regla del N° 9. Se tendrá designando simplemente por F y f las dos funciones anteriores,

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}.\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\text{y} \qquad \frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

de donde eliminando $\frac{dz}{dx}$ se obtendría $\frac{dy}{dx}$ en función de los derivados parciales $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, etc., que son funciones de x, y z.

§ IV. Ejercicios que se pueden resolver por las reglas anteriores.

$y = \cos. x$, $y = \text{tang}\ x$, $y = \cot. x$, $y = \sec. x$, $y = \text{cosec.}\ x$

funciones directas

$$y = \text{arc.}\ (\text{sen.} = x) \qquad y = \text{arc.}\ (\cos. = x)$$

$$y = \text{arc.}\ (\text{tang.} = x) \qquad y = \text{arc.}\ (\cot. = x)$$

funciones indirectas.

La diferencial de $y = \cos. x$, se determina de la siguiente manera:

y=sen. (90°—x), haciendo 90—$x=z$, resulta y=sen. z, dy=cos. $z\,dz$, sustituyendo por z y por dz sus valores queda:

$$dy = \cos.\,(90 - x)\,dx, \text{ ó } dy = - \text{sen. } x\,dx.$$

La diferencial de y=tang. x, se obtiene de este modo:

$$y = \text{tang. } x = \frac{\text{sen. } x}{\cos.\, x}$$

recordando la regla para diferenciar un quebrado resulta:

$$dy = \frac{\cos^2 x\,dx + \text{sen.}^2\,x\,dx}{\cos.^2\,x} = \frac{dx}{\cos.^2\,x}$$

De un modo semejante se diferenciará y = cot. x, y=sec. x, y=cosec. x.

En cuanto á y=arc. (sen=x), se infiere

$$x = \text{sen. } y,\quad dx = \cos.\,y,\; dy\; dx = \sqrt{1-x^2}.\; dy,$$

de donde
$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Por analogía se obtendrían las diferenciales de las ortas funciones angulares inversas.

Sea
$$y = (a + b\,x^m)^n$$

haciendo $(a+b\,x)^m = z$, resulta

$$y = z^m$$

de donde

$$dy = m\,z^{m-1}\,d\,z$$

sustituyendo por z y por dz sus valores, se obtendrá el valor de y.

De cuyo resultado se inferirá que la regla para diferenciar una expresión como $y=x^m$, es la misma que para el caso propuesto.

Sea $y = u^v$, de donde log. $y = v$. log. u

$$\frac{\text{log. } e\, dy}{y} = \frac{v \text{ log. } e\, du}{u} + \text{log. } u.\, dv$$

de donde

$$du^v = vu^{v-1}\, du + u^v \frac{\text{log. } u}{\text{log. } e}\, dv$$

V. Derivadas y diferenciales de diversos órdenes de las funciones de una variable, ejemplos de su empleo.

11. Cuando y es una función de x expresada por la notación $y = \text{F}(x)$, las reglas anteriores hacen conocer su derivada con relación á x, designada por F' (x).

Esta derivada, es en general, una función de x, y por consecuencia ella misma es una nueva derivada con relación á la variable x; se la designa por F'' (x) y se le llama segunda derivada con relación á F (x).

Si F'' (x) es aún una función de x, su derivada con relación á esta misma variable se designa por F''' (x) y se llama la tercera derivada de F (x).

Considerando las derivadas sucesivas producidas por F (x), se comprende que la notación F^n (x) indica la derivada del mismo órden n de la función F (x).

Las derivadas sucesivas tienen otra notación que conviene conocer.

Lo mismo que por F' (x), se pone $\frac{dy}{dx}$ se podría por

$$\text{F''}(x), \text{ escribir, } \frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}$$

Pero se reemplaza esta notación por $\frac{d.}{dx}\frac{dy}{dx.}$ ó mejor $\frac{d^2y}{dx^2}$ que significa lo mismo.

En general, si se tiene

$$F\,(x)=y$$

$$F^n\,(x)=\frac{d^n y}{dx^n}$$

12. Ejemplos: $y=8+3\,x^5-2x^4+x$

$$\frac{dy}{dx}=15\,x^4-8\,x^3+1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=60\,x^3-24\,x^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=180\,x^2-48\,x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=360\,x-48.$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=360.$$

Se ha visto que en general x ó y dependen una de otra y que si se consideran como cantidades finitas

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Ejemplo: $y=x^2$

$$\frac{dy}{dx}=2\,x,\ \frac{d^2y}{dx^2}=2.$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2x},\qquad \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{4x^3}.$$

ó bien $x=y^{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{dx}{dy}=\tfrac{1}{2}\,y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4y^{\frac{3}{2}}}$$

Luego, cuando se trata de derivadas superiores, no se puede simplemente cambiar la variable independiente.

13. *Sentido de la concavidad de las curvas.* Es fácil comprender la utilidad de las segundas diferenciales en la discusión de las funciones y de las curvas que las representan. x é y representando las coordenadas variables de una curva referida á dos ejes, no solamente la ecuación $y=F(x)$ que las liga hace conocer la ordenada y que corresponde á una abscisa x; sino, que si se calcula $F'(x)$, se encuentra la inclinación sobre el eje de las abscisas de la tangente en un punto M determinado por las coordenadas. El signo de $F'(x)$, muestra si la función $F'(x)$ crece ó decrece cuando x aumenta; é indica si á partir del punto M avanzando en el sentido de las x positivas, la curva se eleva ó baja relativamente á una paralela al eje de las x; y el valor absoluto que toma $F'(x)$ en el punto M de que se trata, manifiesta la rapidéz de esta elevación ó descenso.

Avanzando en esta discusión considerarémos á $F'(x)$, cuando x aumenta. Si $F'(x)$ es constante, su derivada $F''(x)$ resulta nula; es el caso particular de una línea recta, más ó menos inclinada sobre el eje de las x, según el valor de $F'(x)$

Si $F''(x)$, no siendo nula, es positiva, significa que $F'(x)$ aumenta cuando se pasa del punto M á un punto inmediato del lado de las x positivas; luego la inclinación aumenta, y por consiguiente la curva vuelve su concavidad en el sentido de las y positivas. Lo contrario se infiere si $F''(x)$ resultare negativa.

14. *Puntos de inflexión.*—Puede suceder que para determinado valor de x, $F''(x)$ sea nula, sin que $F'(x)$ sea constante. Por ejemplo:

$$y=F(x)=a\,x+\frac{x^3}{b^2}.$$

La curva que esta ecuación representa tiene su ordenada y compuesta de ax, ordenada de una recta que pasa por el orígen, y de $\frac{x^3}{b^2}$ cantidad del mismo signo que x. Así, del lado de las x positivas, la curva queda arriba de la recta, es decir que se separa en el sentido de las y positivas; y del lado de las x negativas queda abajo.

La diferenciación dá

$$F'(x)=a+\frac{3x^2}{b^2} \quad \text{y} \quad F''(x)=\frac{6x}{b^2}$$

en el orígen de las coordenadas por donde pasa la curva, se tiene

$$x=0, \quad \text{y} \quad F'(x)=a$$

así la curva es tangente á la recta mencionada. En cuanto á F'' (x) resulta nula en el orígen, y del mismo signo que x. Luego más allá del orígen, la curva vuelve su concavidad en el sentido de las y positivas, y más acá del orígen la vuelve en sentido contrario.

El punto de la curva que goza la propiedad del cambio de sentido de la concavidad se llama punto de inflexión. Está caracterizado por la condición que si $y=f(x)$ representa la curva referida á dos ejes, x' siendo la abscisa del punto de inflexión, la segunda derivada $f''(x)$ es nula cuando se hace $x=x'$, y tiene dos signos diferentes cuando se hace $x>x'$ y $x<x'$.

15. *Máximos y mínimos de una función ó de la ordenada de una curva.* Si para valores crecientes de la variable ó de la abscisa, la función ó la ordenada, después de haber aumentado disminuye; y si, en este intervalo la derivada ó la inclinación, desde luego positiva, y en seguida negativa, varía de una manera contínua y pasa en consecuencia por cero; en esta doble hipotésis, el valor de la función ó de la ordenada y que corresponde á $\frac{dy}{dx}=0$ se llama máximo de esta función. Será mínimo en el caso en que la función decreciente aumente en seguida.

En el primer caso, á medida que la variable x aumente, la derivada decrece antes y después del máximo, y por consecuencia la segunda derivada es negativa, lo que equivale á decir que la curva representativa de la función vuelve su concavidad en el sentido de las y negativas. En el segundo caso, lo contrario tiene lugar. Luego:

Teorema. *En general un máximum ó un mínimo de una función corresponde á un valor de la variable que hace la derivada nula. Y hay máximum si para los valores de la variable que preceden y que siguen, la segunda derivada es negativa; y hay mínimum si la segunda derivada es positiva.*

16. Ejemplos. I. $y=f(x)=a+mx+\frac{x^2}{b}$.

$$f'(x)=m+\frac{2x}{b}. \qquad \text{y} \quad f''(x)=\frac{2}{b}.$$

$f'(x)=0$ tiene lugar para

$$x=-\frac{mb}{2}$$

habrá mínimo si b es positivo,

$$y=a-\frac{m^2b}{4}$$

La curva es una parábola.

II. $$y=mx(x-a)$$

$$f'(x)=m(2x-a) \text{ y } f''(x)=2m$$

La curva es también una parábola. $f'(x)$ es nula para $x=\frac{a}{2}$, que corresponde á un mínimo ó á un máximo de y, según que m es positivo ó negativo.

III. $y^2=mx(a-x)$. Si no se busca más que el máximo del valor absoluto de y, basta poner

$$f(x)=x(a-x), \; f'(x)=a-2x, \; f''(x)=-2$$

$x=\frac{a}{2}$ corresponde á un máximo

$$y=\frac{a}{2}\sqrt{m}.$$

IV. Sea en general

$$y=f(x).\ f(a-x),$$

se emplea la letra f dos veces, para indicar una misma forma de función. Ejemplo: $y=\text{sen}\ x.\ \text{sen}\ (a-x)$.

Cualquiera que sea esta forma, un máximo ó un mínimo de y corresponde á $x=a-x$ ó $x=\frac{a}{2}$. Dos valores de x igualmente distantes de $\frac{a}{2}$, el uno en más y el otro en menos, dan para y dos valores iguales.

La misma regla y la misma explicación tiene lugar para

$$y=f(x)+f(a-x).$$

Si se tiene

$$y=f(x).\ f\left(\frac{a}{x}\right) \text{ ó } y=f(x)+f\left(\frac{a}{x}\right)$$

un máximo ó un mínimo corresponde á $x=\frac{a}{x}$, es decir á $x^2=a$, porque y toma dos valores iguales sea para $x^2=ma$, sea para $x^2=\frac{a}{m}$, es decir para dos valores de x el uno más grande, y el otro más pequeño que $\sqrt{a}$, cualquiera que sea m.

17. Series de Taylor y de Maclaurin. Según la fórmula de Newton se tiene la identidad siguiente:

$$(x+h)^m=x^m+mhx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.\ 2}h^2x^{m-2}+\dots\dots\dots+h^m.$$

El factor mx^{m-1} es la derivada de x^m, lo mismo el factor $m(m-1)x^{m-2}$ es la segunda derivada de x^m. Resulta que si se designa x^m por $F(x)$, la identidad anterior podrá escribirse

$$F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots\ldots\; h^m.$$

que es la fórmula de Taylor.

Si en la fórmula de Taylor se hace $x=0$, queda

$$F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{h^2}{1.2}F''(0)+\frac{h^3}{1.2.3}F'''(0)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

se puede reemplazar h por x, y obtiene

$$F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}F'''(0)+\ldots\ldots\ldots$$

que es la fórmula de Maclaurin.

Ejemplos: Sea determinar el desarrollo de sen $(x+h)$ por la fórmula de Taylor

$F(x)=\text{sen } x$, $F'(x)=\cos x$, $F''(x)=-\text{sen } x$ $F'''(x)=-\cos x$

y por consiguiente:

$$\text{sen }(x+h)=\text{sen } x+h\cos x-\frac{1}{2}h^2\text{ sen } x-\frac{1}{2.3}h^3\cos x+$$

$$+\frac{1}{2.3.4}h^4\text{ sen } x+\ldots\ldots\ldots$$

Por el ejemplo anterior vemos que $F(x)$ es el valor que adquiere sen $(x+h)$, cuando $h=0$.

Por la fórmula de Maclaurin, busquemos los desarrollos de sen x y cos x.

$F'(0)=1$, $F''(0)=0$, $F'''(0)=-1$, $F^{IV}(0)=0$, $F^{V}(0)=1)$

y en consecuencia

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} \dots\dots\dots\dots\dots$$

Adoptando los valores particulares de la función y de las derivadas sucesivas cuando $x=0$, se aplica la fórmula de Maclaurin.

De una manera semejante al caso anterior tendríamos que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} \dots\dots\dots\dots$$

Terminarémos estas nociones de cálculo diferencial, con algunas aplicaciones geométricas.

Construir la curva representada por la ecuación

$$y^2 = x^3 - x^4$$

Construir las curvas representadas por la ecuación

$$y^2 = 2\,p\,x + q\,y^2.$$

Teniendo el coeficiente diferencial el significado geométrico de la tangente trigonométrica del ángulo que una recta forma con el eje de las x, se podrá resolver fácil y generalmente el problema importante de la geometría: determinar la ecuación de la tangente á una curva cualquiera, conociendo la ecuación de ésta.

Si x' é y' representan las coordenadas del punto de contacto, la ecuación de una recta que pasa por un punto es

$$y - y' = a\,(x - x') \dots\dots (1)$$

y para determinar la ecuación de la tangente, bastará conocer a, ó lo que es lo mismo $\frac{dy}{dx}$.

Sea encontrar la ecuación de la tangente á las curvas de 2° grado representadas por la ecuación

$$A\,y^2 + B\,x\,y + C\,x^2 + D\,y + E\,x + F = 0$$

recordando la regla para diferenciar las funciones de diversas variables tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\,A\,x+E\,y+C}{2\,B\,y+E\,x+D}.$$

sustituyendo en (1) resulta

$$y-y' = -\frac{2\,A\,x+E\,y+C}{2\,B\,y+E\,x+D}(x-x')$$

para la ecuación de la tangente á las curvas de 2º grado.

Determinar la ecuación común de las asíntotas á las cónicas representadas por la ecuación

$$y^2+(1-n^2)x^2-2\,d\,x+d^2=0.$$

El método que se tiene que seguir consiste en determinar el coeficiente angular y el lineal propios á la asíntota; para lo cual basta suponer infinitas las coordenadas del punto de contacto en

$$a=\frac{d\,y}{d\,x}$$

y en el valor que se obtiene para b deducido de la ecuación

$$y=a\,x+b$$

es decir, $b=y-a\,x$ ó $b=y-\frac{d\,y}{d\,x}x.$

$$a=\frac{d+(n^2-1)\,x}{y},\quad b=y-\frac{x\,[d+(n^2-1)]}{y}$$

sustituyendo por y su valor resulta

$$a=\frac{d+(n^2-1)\,x}{\sqrt{(n^2-1)\,x^2+2\,d\,x-d^2}},\quad b=\frac{d\,x-d^2}{\sqrt{(n^2-1)\,x^2+2\,d\,x-d}}$$

Con el fin de hacer desaparecer toda indeterminación, cuando x=o, dividiremos los dos términos de las fracciones por x y resulta:

$$a=\frac{\frac{d}{x}+n^2-1}{\sqrt{n^2-1+2\frac{d}{x}-\left(\frac{d}{x}\right)^2}},\qquad b=\frac{d-d\left(\frac{d}{x}\right)^2}{\sqrt{n^2-1+2\left(\frac{d}{x}\right)-\left(\frac{d}{x}\right)^2}}$$

y como $\frac{d}{x}$ queda nulo, cuando $x=\infty$.

resulta:

$$a=\pm\sqrt{n^2-1},\quad b=\pm\sqrt{\frac{d}{n^2-1}}$$

luego:

$$y=\pm\sqrt{n^2-1}.x\pm\sqrt{\frac{d}{n^2-1}}$$

será la ecuación pedida

Si $n>1$, caso de la hipérbola, los valores son reales.

Si $n<1$, caso de la elipse, los valores son imaginarios.

Si $n=1$ $a=o$, lo que asigna al eje x, como límite único de la dirección de las tangentes, pero como b queda infinito, resulta que la parábola no tiene asíntotas rectilíneas.

Determinar las asíntotas de la ecuación.

$$\mathrm{A}\,y^2+\mathrm{B}\,x\,y+\mathrm{C}\,x^2+\mathrm{D}\,y+\mathrm{E}\,x+\mathrm{F}=0$$

Se procederá de una manera semejante al caso anterior.

CAPITULO II.

Nociones del cálculo integral.

§ I. Consideraciones fundamentales.

1. Cuando la inclinación $\frac{dy}{dx}$ de una curva con relación al eje de las x es conocida en función de x, se comprende que es un dato suficiente para determinar la forma de la curva, y aun su situación relativa á los ejes si se conoce además un punto por el cual debe pasar.

Sea $\frac{dy}{dx}=f(x)$. Si se reconoce $f(x)$ por la derivada de una función conocida $F(x)$, se deducirá que $y=F(x)$ será la ecuación de una curva que satisface á la condición dada, y que se obtendrán tantas curvas como se quiera, que satisfagan á dicha condición, poniendo la fórmula

$$y=F(x)+C.$$

en la cual C representa una constante arbitraria, es decir, una cantidad que no varía para los diversos puntos de una misma curva, pero que cambia cuando se pasa de una curva á otra que satisface igualmente á la condición

$$\frac{dy}{dx}=f(x).$$

2. El cálculo diferencial tiene por objeto, dada una función, determinar su auxiliar, y en el cálculo integral se determina la función de la cual debe provenir una expresión ó una auxiliar dada.

El signo $\int$, se llama integral, y se usa para expresar el paso de la diferencial á la función.

Sea $$d\,y = m\,x^{m-1}\,d\,x$$

Considerando que para obtener el anterior resultado se ha aplicado la regla núm. (6) á la función que se busca, habrá que invertir la misma regla para descubrir la función primitiva, y quedará la siguiente: *el exponente de la variable se aumentará en una unidad, y se dividirá la expresión por el exponente aumentado y por la diferencial de la variable.*

En el presente caso tendrémos:

$$\int m\,x^{m-1}\,d\,x = x^m + C$$

C es la constante que desaparece en la diferenciación.

La integral anterior se llama indefinida en tanto que C permanezca por determinar. Se determina, tomando por integral definida la diferencia de los valores correspondientes á la integral general, y se expresa así:

$$\int_p^x f\,(x)\,d\,x = F\,(x) - F\,(p).$$

3. El mayor conocimiento que se tenga de las diferenciales y sus relaciones con las respectivas funciones, proporcionará más medios para resolver las cuestiones de integración.

Ejemplos de integración por funciones logarítmicas.

Integrar la ecuación

$$-p\,\pi\,x^2\,d\,y = 2\,\pi\,r\,x\,d\,x$$

Dividiendo por $2\pi^2 x$, resulta:

$$-\frac{p\,d\,y}{2\,r}=\frac{d\,x}{x}$$

y por consiguiente:

$$\int-\frac{p}{2\,r}\,d\,y=\int\frac{d\,x}{x}=\text{Log.}x+\text{C.}$$

Se determina la constante suponiendo que x_0, anula el valor de la integral, luego $\text{C}=-\text{Log.}\,x_0$, y tendrémos

$$-\frac{p}{2\,r}\int d\,y=\int\frac{d\,x}{x}=\text{Log.}\frac{x}{x^0}$$

ó bien $x=x_0\,e^{-\frac{py}{2r}}$

que es la ecuación de una logarítmica.

$$\int a^x\,dx=\frac{\text{log.}\,a}{\text{log.}\,e}a^x+\text{C.}\quad (*)$$

$$\int\frac{d\,x}{a\,x+b}=\int\frac{d\,(a\,x+b)}{a\,(a\,x+b)}=\frac{\text{log.}\,(a\,x+b)}{a\,\text{log.}\,e}.$$

$$y=\int\frac{d\,x}{\sqrt{a+x^2}}$$

haciendo $a+x^2=z^2$

de donde $x\,d\,x=z\,d\,z$

(*) Supuesto que si se tiene:

$$y=a^x,\ \text{log.}\,y=x\,\text{log.}\,a$$

de donde

$$\frac{\text{log.}\,e\,dy}{y}=\text{log.}\,a\,dx,\qquad \text{y}\qquad da^x=\frac{\text{log.}\,a}{\text{log.}\,e}\,dx.$$

de donde

$$d\,y=\frac{d\,x}{z}=\frac{d\,z}{x}=\frac{d\,x+d\,z}{x+z}$$

$$y=\int\frac{d\,(x+z)}{x+z}=\frac{\log.\,(x+z)}{\log.\,e}$$

por último $\quad y=\frac{1}{\log.\,e}\log.\,(x+\sqrt{a^2+x^2}).$

Ejemplos de integración de funciones angulares directas.

$$\int \text{sen.}\,x\,d\,x=-\cos.\,x$$

$$\int \cos.\,x\,d\,x=\text{sen.}\,x$$

$$\int\frac{d\,x}{\cos^2 x}=\text{tang.}\,x$$

$$\int\frac{d\,x}{\text{sen}^2\,x}=-\text{cot.}\,x.$$

Ejemplos de integración de funciones angulares inversas.

$$\int\frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc. (sen.}=x)$$

$$\int-\frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc. (cos.}=x)$$

$$\int\frac{d\,x}{1+x^2}=\text{arc. (tang.}=x)$$

$$\int-\frac{d\,x}{1+x^2}=\text{arc. (cot.}=x)$$

$$\int\frac{d\,x}{\sqrt{2\,x-x^2}}=\text{arc. (sen. vers)}=x$$

$$\int \frac{d\,x}{\sqrt{2\,x-x^2}} = \text{arc.}\,(\text{cos. vers} = x)$$

$$y = \int \frac{d\,x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\frac{d\,x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \text{arc.}\left(\text{sen.} = \frac{x}{a}\right)$$

No se han agregado las constantes en los ejercicios últimos, porque para un valor conveniente de x desaparecen.

Con el cambio de la variable se facilita la práctica de la integración. Sea

$$y = \int \frac{x\,d\,x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

haciendo $a^2-x^2=u^2$, se obtiene $-x\,d\,x = u\,d\,u$, y de consiguiente

$$y = \int -\frac{u\,d\,u}{u} = -u + \text{C} \quad \text{ó} \quad y = -\sqrt{a^2-x^2} + \text{C}$$

Integrar $\text{y} = 4\int (a-5\,x)^2\,x^2\,d\,x$

deberá encontrarse, cambiando la variable

$$y = -\frac{4}{45}(a-5\,x^3)^3 + \text{C}.$$

§ II. Integración por partes.

Se sabe que

$$d.\,u\,v = v\,d\,u + u\,d\,v$$

de donde

$$u\,v = \int v\,d\,u + \int u\,d\,v.$$

luego

$$\int u\,d\,v = u\,v - \int v\,d\,u. \quad (1)$$

Si la última integración puede hacerse con más facilidad que la primera, habrá ventaja de hacer depender

$$\int u\,d\,v, \text{ de } \int v\,d\,u.$$

Integrar $\quad d\,y = x \text{ sen. } x\,d\,x.$

harémos

$$u = x, \quad d\,v = \text{sen. } x\,d\,x$$

sustituyendo en la fórmula (1) se obtiene

$$\int x \text{ sen. } x\,d\,x = -x \cos. x + \int \cos. x\,d\,x = \text{sen. } x - x \cos. x.$$

Por el ejemplo anterior se vé que para aplicar la fórmula (1), se descompondrá una diferencial $f(x)\,d\,x$ en dos factores; uno de ellos, que sea una diferencial fácil de integrar, que representarémos por $d\,v$, y el otro una función que representarémos por u. El método de integración por partes es de bastante uso.

§ III. Integración por séries.

Cuando una diferencial $f(x)\,d\,x$ se puede convertir en una série convergente, se podrá obtener su integración con toda la apróximación que se quiera.

En efecto, si $f(x)$ suministra la serie:

$$f(x) = a + b\,x^m + c\,x^n + \dots\dots\dots$$

se tendrá

$$\int f(x)\,dx=\int(a+b\,x^m+c^n+\ldots\ldots\ldots)dx$$

y recordando el teorema del número 10, se tendrá evidentemente este otro: la integral de una suma de diferenciales, es la suma de sus integrales.

Ejecutada la integración resulta:

$$\int f(x)\,dx=ax+\frac{b}{m+1}x^{m+1}+\frac{c}{n+1}x^{n+1}+\ldots\ldots+C$$

§ IV. La integración por series se puede efectuar directamente sin necesidad del prévio desarrollo de la expresión diferencial.



Sea $f(x)\,dx$ la diferencial que se quiere integrar: aplicando el método de integración por partes tendremos, empleando la fórmula

$$\int v\,du=uv-\int u\,dv.$$

$$v=f(x) \qquad du=dx$$

y en consecuencia

$$dv=\frac{d.\,f(x)}{dx}\,dx \qquad u=x$$

por lo cual se haya

$$\int f(x)\,dx=x\,f(x)-\int x\frac{d.\,f(x)}{dx}\,dx.$$

Volviendo á aplicar el mismo método á la integral del segundo miembro harémos:

$$v=\frac{d\,f(x)}{dx} \qquad du=x\,dx$$

y se tendrá:

$$dv=\frac{d^2 f(x)}{dx^2}d\,x \qquad u=\frac{x^2}{2}$$

con lo que resulta sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\int f(x)\,dx=x\,f(x)-\frac{d.\,f(x)}{dx}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{x^2\,d^2 f(x)}{dx^2}\,dx$$

La integral del segundo miembro, continuando la misma secuela dá:

$$v=\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \qquad du=x^2\,dx$$

obteniéndose

$$dv=\frac{d^3 f(x)}{dx^3}dx \qquad u=\tfrac{1}{3}\,x^3$$

y la ecuación anterior quedará:

$$\int f(x)\,dx=x\,f(x)-\frac{d.\,f(x)}{dx}\frac{x^2}{2}+\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\frac{x^3}{2.\,3}-\tfrac{1}{3}\int x^3\frac{d.^3 f(x)}{dx^3}\,dx.$$

Continuando de un modo análogo se obtiene:

$$\int f(x)\,dx=x\,f(x)-\frac{d\,f(x)}{dx}\frac{x^2}{2}+\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\frac{x^3}{2.\,3}-$$

$$\frac{d^3.\,f(x)}{dx^3}\frac{x^4}{2.\,3\,4}+\ldots\ldots+\text{C}.$$

fórmula debida á Juan Bernoulli.

I. Integrar la expresión:

$$dy=(a-2\,x)^2\,dx$$

Se tendrá: $f(x)=(a-2\,x)^2$

$$\frac{d.\,f(x)}{dx}=8\,x-4\,a,\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2}=8.$$

luego:

$$\int (a-2x)^2\, dx = (a-2x)^2 x + 2ax^2 - \tfrac{8}{3} x^3 + C.$$

§ V. Aplicaciones del cálculo integral.

El método de los infinitamente pequeños permite obtener con mucha facilidad las auxiliares de la área de una curva plana, de un arco de curva plana, de una superficie de revolución y de un volúmen de revolución. Y mediante el cálculo integral se llegan á resolver los problemas capitales de la geometría, á saber: rectificación, cuadratura y curvatura de las figuras.

Determinaremos primeramente la auxiliar de la área de una curva plana comprendida entre la curva el eje de la x y dos ordenadas.

Sea M L (Fig. 2) una ordenada de la curva, y s la área que limita esa ordenada.

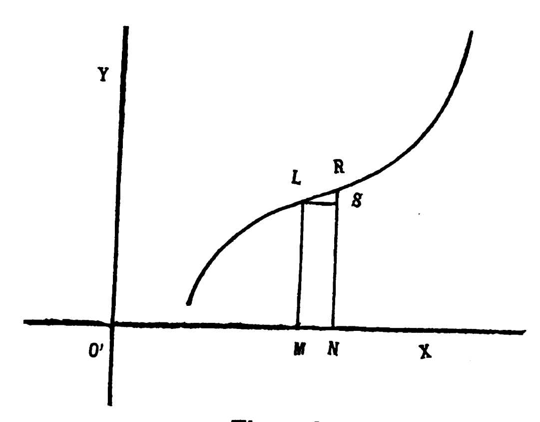


Figura 2.

El aumento de esta área es M N L B, pero si se considera el incremento M N muy pequeño, producirá en la orde-

nada correspondiente otro igualmente pequeño, en cuyo caso se podrá tomar la área del rectángulo MNLS, expresada por $ds = y\, dx$, ó $y = \frac{ds}{dx}$, de donde se infiere que, la auxiliar de una área de una curva plana, está representada por su ordenada.

Expresando la ecuaciones que esten en coordenadas polares, en el sistema rectangular, se podrá determinar la área de una curva.

Pero directamente se puede encontrar la auxiliar de la superficie en las curvas polares.

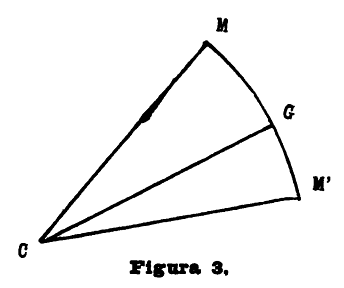


Figura 3.

Sea G C M' (Fig. 3) un incremento infinitamente pequeño representado por ds, de la superficie de un sector cuya base G M' se confunde con el arco infinitamente pequeño, que tiene por radio r, trazado desde el centro C. En este supuesto, G M' $= r\, du$, u representa el ángulo G C M'; y por consiguiente

$$ds = \tfrac{1}{2} r^2\, du$$

representa la área del sector G C M' ó sea la auxiliar que se busca.

I. Ejercicio. Calcular la área de la parábola, representada por $y^2 = 2\,px$ (Fig. 4) comprendida entre o y P M.

Tenemos:

$$s = \int y\, dx = \int \sqrt{2\,px.}\, dx$$

poniendo por y su valor.
de donde

$$s=(2p)^{\frac{1}{2}}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\tfrac{2}{3}(2p)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

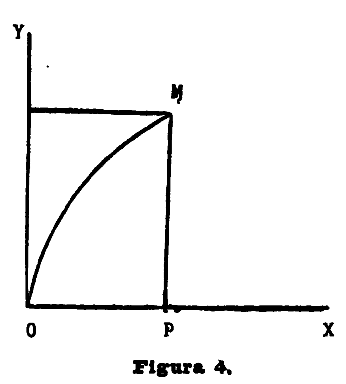


Figura 4.

Contándose la área desde el origen, donde $x=0$, resulta $C=0$

y por consiguiente

$$s=\tfrac{2}{3}(2p)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=\tfrac{2}{3}(2p)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x=\tfrac{2}{3}xy$$

volviendo á restablecer á y.

La parábola es pues una curva cuadrable exactamente.

II. Determinar la área de las espirales representadas por

$$s=au^{n}$$

$$s=\tfrac{1}{2}\int r^{2}du=\tfrac{1}{2}\int a^{2}u^{2n}du=\tfrac{1}{2}\frac{a^{2}u^{2n+1}}{(2n+1)}$$

La constante es nula, contando las áreas desde el origen. Para la espiral de Conon (Fig. 5) se tiene $a=\frac{1}{2\pi}$ y $n=1$, luego: $s=\frac{u^{3}}{24\pi^{2}}$.

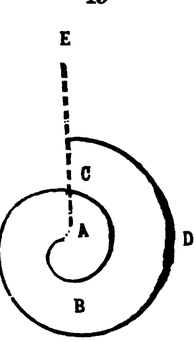


Figura 5.

Si $u=2\pi$, $s=\frac{1}{3}\pi$ para la superficie A B C; si $u=4\pi$ $s=\frac{8}{3}\pi$; pero en la segunda revolución el radio vector describe nuevamente la área A B C, por lo que área

$$\text{A D E}=\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\pi=\frac{7}{3}\pi.$$

III. Determinar la área de una elipse.

$$S=\int y dx \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

De la ecuación de la elipse.

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

se obtiene

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

sustituyendo en (1) resulta:

$$S=\int\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-b^2}$$

la integral expresa la área de un cuadrante de círculo de radio a ó sea $\frac{1}{4}\pi a^2$

luego $$S=\frac{b}{a}.\frac{1}{4}\pi a^2=\frac{1}{4}\pi ab$$

será el área de un cuadrante de elipse y la total será

$$\pi ab=S.$$

IV. Determinar el área de la hipérbola referida á sus asíntotas.

Sea $xy=k^2$

sustituyendo en $S=\int y\,dx$, se tiene

$$S=\int\frac{k^2}{x}dx=k^2\int\frac{dx}{x}=k^2\frac{\log x}{\log e}$$

resulta: Si $k=1$ y $\log. e=1$

$$s=\text{Log. } x$$

En este caso la área queda representada por el logaritmo neperiano de la abscisa, razón por la cual á los logaritmos neperianos llamamos hiperbólicos.

V. Calcular la área del lemniscato representado por $y^2=x^2-x^4$

§ V. **Determinar la auxiliar de un arco de curva plana.**

Empleando el método de Leibnitz se considera que la abscisa x=O P (Fig.6) se convierte en $x+dx$, siendo dx un incremento infinitamente pequeño, y que la orde-

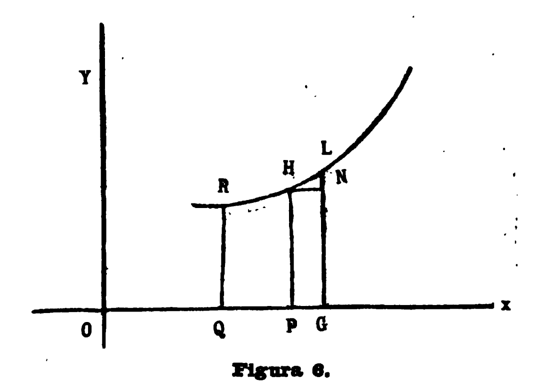


Figura 6.

nada y=P H se incrementa igualmente en dy, cantidad también infinitamente pequeña, quedando $y+dy$. En el triángulo mixtilíneo infinitesimal H N L la hipotenusa se confundirá sensiblemente con la cuerda y entonces el triángulo rectilíneo, dará conforme al teorema de Pitágoras:

$$dz^2=dy^2+dx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

llamando z la hipotenusa.

Si llamamos r el radio vector y u el ángulo de dirección contado desde el eje de las x, se tiene

$$x=r \cos u \quad y=r \operatorname{sen} u$$

Diferenciando se tiene

$$dx=-r \operatorname{sen} u\, du+\cos u\, dr \qquad dy=r \cos u\, du+\operatorname{sen} u\, dr$$

elevado al cuadrado sumando y reduciendo queda

$$dx^2+dy^2=dr^2+r^2du^2$$

sustituyendo en (1) obtenemos.

$$dz^2=dr^2+r^2du^2. \quad (2)$$

para rectificar las curvas polares.

De la (1) se obtiene

$$z=\int\sqrt{dx^2+dy^2}$$

y vamos á rectificar un arco de cicloide, como primera aplicación. La cicloide tiene por ecuación

$$x=\text{arc. (sen. ver.}=y)-\sqrt{2\,ry-y^2}$$

de donde

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2ry-y^2}}{y}$$

Luego:

$$z=\int\sqrt{\frac{y^2dy^2}{2ry-y^2}+dy^2}=\int\sqrt{\frac{2ry}{2ry-y^2}}\,dy$$

$$=\int\sqrt{\frac{2r}{2r-y}}\,dy.=\sqrt{2r}\int\sqrt{\frac{2ry}{2ry-y^2}}$$

$$z=-2\sqrt{2r(2r-y)}+C$$

Si se cuenta el arco entre $y=0$ é $y=2r$, $z=4r$ y para todo el arco de cicloide $z=8\,r$.

II. Rectificar el arco de la parábola semicúbica $y^2=ax^3$.

§ VI. Calcular la auxiliar de la superficie de revolución, considerada como una función de la abscisa de la curva generatriz.

Supónganse que la diferencial de la superficie S, sea un incremento infinitesimal producido por el incremento in-

finitamente pequeño (fig. 6) del arco R H, el elemento H L se considera rectilíneo. La superficie del trozo elemental de cono, que se produce al girar la figura al rededor del eje de las x tiene por expresión

$$\pi(y+y+dy)\ dz=2\pi\ y\ dz+\pi dy\ dz$$

dz representa la extensión del elemento H L, x é y las coordenadas de H.

Resultará $dS=2\pi\ y\ dz$ ó $dS=2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}$, poniendo por dz, $\sqrt{dx^2+dy^2}$ que ya se determinó, y desechando el producto $dy\ dz$ por tratarse de un resultado infinitamente pequeño de segundo órden.

I. Calcular la superficie del elipsoide, tanto prolongado, como aplanado.

La integración la hará el lector valiéndose de la integración por series.

II. Determinar la superficie del paraboloide, engendrado por la parábola $y^2=2\ px$.

§ VII. Determinar la auxiliar de un volúmen de revolución.

Por el método infinitesimal, y haciendo consideraciones análogas á las que hicimos en el caso de la auxiliar de la área de revolución (fig. 6), se obtiene, recordando á lo que es igual el volúmen de un trozo de cono

$$dv=\frac{1}{3}\pi\ [y^2+(y+dy)^2+y(y+dy)\ ]dx$$

ó

$$dv=\pi\ y^2dx+\pi(y\ dy\ dx+\frac{1}{3}dy^2dx)$$

y conforme á lo dicho en el párrafo anterior se desecharán

los productos $y\,dy\,dx$, $\frac{1}{3}\,dy^2\,dx$, por lo que resultará para la auxiliar que buscamos

$$dv = \pi\,y^2 dx.$$

I. Determinar los volúmenes de revolución engendrados por las curvas representadas por

$$y^2 = 2px + x^2$$

II. Determinar el volúmen que engendra, moviéndose al derredor del eje x, la curva

$$y^2 = \frac{1}{2} + x \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4x.}$$

FIN.

INDICE.

CAPITULO II.—CÁLCULO INTEGRAL.

36	19	$b=y-\frac{x\lfloor d+(n^2-1)x\rfloor}{y}$	$b=y-\frac{x\lfloor d+(n^2-1)x\rfloor}{y}$.
37	4	$b=\frac{d-d\left(\frac{d}{x}\right)^2}{\sqrt{(n^2-1+2\left(\frac{d}{x}\right)-\left(\frac{a}{x}\right)^2}}$	$b=\frac{d-d\left(\frac{d}{x}\right)}{\sqrt{n^2-1+2\left(\frac{d}{x}\right)-\left(\frac{d}{x}\right)^2}}$
40	18	$d\ a^x=\frac{\log. a}{\log. e}d\ x$	$d\ a^x=\frac{\log. a}{\log. e}a^x\ d\ x$.
42	11	Integrar $y=4\int(a-5\ x)^2+x^2 d\ x$	Integrar $y=4\int(a-5\ x^3)^2\ x^2\ d\ x$.
44	2	$\int f(x)\ d\ x=\int(a+b\ x^m+c^n+\ldots\ \ldots.)\ \ldots d\ x$	$\int f(x)\ d\ x=\int(a+b\ x^m+c\ x^n+\ldots.)\ d\ x$.
44	7	$\int f(x)\ dx=ax+\frac{b}{m+1}x^{n+1}+\frac{c}{n+1}x^{n+1}+\ .+C.$	$\int f(x)\ d\ x=a\ x+\frac{b}{m+1}x^{m+1}+\frac{c}{d+1}\ x^{n+1}+\ldots.+C.$
49	12	$S=\int\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-b^2}$	$S=\pm\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\ d\ x$.
52	10	$=\int\sqrt{\frac{2\ r}{2\ r-y}}dy.=\sqrt{2r}\int\sqrt{\frac{2\ r\ y}{2ry-y^2}}$	$=\int\sqrt{\frac{2\ r}{2\ r\ y-y^2}}d\ y$.
54	6	$y^2=2\ p\ x+x^2$	$y^2=2\ p\ x\pm q\ x^2$.
54	9	$y^2=\frac{1}{2}+x\pm\ \frac{1}{2}\sqrt{1+4\ x}$	$y'=\frac{1}{2}+x-x^2\pm\ \frac{1}{2}\sqrt{1+4\ x}$.

FE DE ERRATAS.

Pág.	línea	DICE	DEBE DECIR
14	14	$y+\Delta y+(x\ t\Delta x)^m=x^m+m\,x^{m-1}\Delta x+k\,x^2$ . . (2)	$y+\Delta y=(x+\Delta x)^m=x^{m-1}+m\,x^{m-1}\Delta x+k\Delta x^2$ . . (2).
14	16	$\frac{m\,(m-)1x^{m-3}}{1.\,2}$	$\frac{m\,(m-1)}{1.\,2}x^{m-2}$
15	6	lim. $\frac{\Delta\,y}{\Delta\,x}$ ó $\frac{d\,y}{d\,x}=-\frac{1}{x^2}\,dx$	lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ó $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$.
18	8	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}.\ \frac{\Delta u}{\Delta u}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.\ \frac{\Delta u}{\Delta x}$.
19	2	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{du}}{\frac{du}{dx}}=\frac{F'\,u}{f'\,u}$	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}=\frac{F'\,(u)}{f'\,(u)}$
19	19	$\frac{dy}{dx}=\frac{\log.\,u}{u}m\,v^{m-1}\cos.\,x$	$\frac{dy}{dx}=\frac{\log.\,e}{u}m\,v^{m-1}\cos.\,x$.
21		. . . .	Las v y w deben ser ω.
24	15	compuesta	componente.
27	17	$(a+b\,x)^m=z$, resulta	$a+b\,x^m=z$, resulta:
27	18	$y=z^m$	$y=z^n$.
27	20	$dy=mz^{m-1}\,dz$	$dy=n\,z^{n-1}\,dz$.
34	8	F (x)	F (h)
35	13	$y^2=2\,p\,x+q\,y^2$	$y^2=2\,p\,x\pm q\,x^2$.
[illegible]	[illegible]	[illegible]	$B\,y^2+E\,x\,y+A\,x^2+D\,y+C\,x+F=0$

Resolución de algunas de las Cuestiones

DE

CÁLCULO INFINITESIMAL

propuestas en el texto.

PÁGINA 9.—DERIVADA DE UNA SUMA ALGEBRÁICA DE FUNCIONES.

1. Sea

$$y = u + v - z$$

una función algebráica de las variables u, v y z, que dependen de x.

Si incrementamos á x. en Δ x, las variables u, y z, que dependen de x, se incrementarán en Δu, Δ v y Δ z, y nos resulta

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (z + \Delta z)$$

de donde despejando á Δ y y sustituyendo por y su valor, queda

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta z$$

dividiendo por Δ x, para tener la relación del incremento de la función *y* al de la variable mediata x, sen tendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

pasando al tímite, teniendo en cuenta que el límite de una suma es igual á la suma de los límites de los sumandos, resulta

$$L.\frac{\Delta y}{\Delta x}=L.\frac{\Delta u}{\Delta x}+L.\frac{\Delta v}{\Delta x}-L\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

ó cambiando la notación

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

luego

$$dy=du+dv-dz$$

lo que quiere decir: que, *la derivada* de una suma algebráica de funciones, ó una función compuesta, es igual á la suma de las derivadas de las funciones componentes*, ó bien: *la diferencial de una fnnción compuesta es igual á la suma de las diferenciales de las funciones componentes.*

Empleando el método de los infinitamente pequeños, se llega inmediatamente al resultado anterior. En efecto, sea

$$y=u+v-z\ldots.(1)$$

la función que consideramos antes, dy, du, dv, dz, los incrementos infinitamente pequeños, *ó sean cantidades*

---

* La derivada de una función es el límite de la relación entre el incremento de la función y el de la variable, cuando este último decrece indefinidamente. La diferencial de una función es el producto de la derivada de esta función por el incremenro infinitamente pequeño de la variable.

variables que tienden hacia cero, de las variables u, v y z; incrementos, que traerán consigo otro dy en la función *y*, por lo que tendremos

$$y + dy = u + du + v + dv - [z + dz]$$

despejando á dy, poniendo por *y* su valor y reduciendo queda:

$$dy = du + dv - dz.$$

3. Si suponemos positivos todos los términos de la igualdad anterior y en número n, tendremos:

$$dv = n\, du$$

lo que hace ver que un coeficiente en la diferenciación ó derivación se conserva en el resultado; pues en el caso que consideramos de sumandos positivos é iguales, la función (1), se convierte en

$$y = n\, u.$$

4. Determinemos la derivada del producto

$$y = u\, v$$

siendo u, y v, funciones de x.

La marcha que se tiene que seguir es del todo semejante á la del caso de una suma algebráica de funciones, es decir: que, *u, y v, recibirán un incremento* Δu y Δv, *por efecto del incremento* Δx; *los incrementos de u y de v, traerá consigo otro* Δy *para y, que se detevminará; en seguida, teniendo la relación del incremento de la función al de la variable mediata ó sea* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, *se pasará al límite, ó se buscará la relación anterior cuando* $\Delta x = 0$, *pudiéndose por último cambiar la notación.*

Quedará la función

$$y = u\, v$$

incrementando á x, de quien dependen u y v

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\,(v+\Delta v)=u\,v+u.\ \Delta v+v\Delta u+\Delta u.\ \Delta v$$

despejando á Δ y, y dividiéndose por Δ x, queda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}.\ \frac{\Delta v}{\Delta x}.\ \Delta\ x.$$

pasando al límite y cambiando la notación

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

Lo que indica: que, *la derivada de un producto de dos variables, es igual á la suma de las derivadas de los factores; considerando respectivamente á uno como constante y al otro como variable* ó bien: *la diferencial de un producto es igual á la suma de las diferenciales de sus factores.*

5. Por el método de los infinitamente pequeños, se tiene

$$y+dy=(u+du)\,(v+dv)=u\,v+u.\ dv+v\ du+du.\ dv$$

despejando á dy, después de sustituir por *y* su valor y prescindir del producto du dv, infinitamente pequeño de 2º orden,

$$dy=u.\ d\,v+v.\ du.$$

6. El caso de una función cociente, como

$$y=\frac{u}{v}$$

se deduce del anterior, del siguiente modo: quitando el denominador resulta:

$$v\,y=u$$

diferenciando, queda

$$v\,dy + y\,dv = du$$

de donde despejando á dy y poniendo por *y* su valor

$$dy = \frac{du}{v} - \frac{u}{v^2}\,dv$$

$$ó \quad dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

luego la diferencial de una función cociente, es igual: *al denominador por la diferencial del numerador, menos el numerador por la diferencial del denominador, y dividida la diferencia por el cuadrado del denominador.*

7. Si en lugar de dos factores, tuviéramos tres ó más, las reglas anteriores se aplicarán, haciéndolas extensivas á todos los factores.

Consideramos una función compuesta de número *n* de factores, tal como

$$y = u\,v\,z\,t \ldots.$$

se tendría diferenciando

$$dy = u\,v\,z \ldots.. dt + u\,v\,t \ldots. d\,z$$

$$+ u\,z\,t \ldots. d\,v + v\,z\,t \ldots. du$$

y suponiendo los n factores iguales, quedará la función convertida en

$$y = u^n$$

y la diferencial anterior en

$$dy = n\,u^{n-1}\,du$$

Lo cual nos dice, que la diferencial de una función potencia se determina: *cambiando el exponente en coeficien-*

te, disminuyendo el exponente en una unidad y multiplicando por la diferencial de la variable.

8. La derivada ó la diferencial de un radical, se reduce al caso de la diferencial ó derivada de una función potencia, empleando el exponente fraccionario.

9. Pasemos á determinar la derivada de la función exponencial

$$y = a^x \ldots . (1)$$

incrementando la variable x, se tiene

$$y + \Delta y = a^{x + \Delta x}$$

restando de este resultado la ecuación anterior, queda

$$\Delta y = a^x (a^{\Delta x} - 1) \ldots . (2)$$

á fin de evidenciar las diversas potencias de Δx, haremos $a = 1 + m$, con lo que nos resulta

$$a^{\Delta x} = (1+m)^{\Delta x} = 1 + \frac{m . \Delta x}{1}$$

$$+ \frac{\Delta x (\Delta x - 1)}{1.2} m^2 + \frac{\Delta x (\Delta x - 1)(\Delta x - 2)}{1.\ 2.\ 3} m^3 + \ldots .$$

sustituyendo en (2) se obtiene

$$\Delta y = a^x \left(\frac{(m . \Delta x)}{1} + \frac{\Delta x (\Delta x - 1)}{1.2} m^2 \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta x (\Delta x - 1)(\Delta x - 2)}{1.\ 2.\ 3} m^3 + \ldots . \right)$$

dividiendo por Δ x, queda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\left(m+\frac{(\Delta x-1)}{1.\ 2}m^2+\frac{(\Delta x-1)\ (\Delta x-2)}{1.\ 2.\ 3}\ m^3+\ldots.\right)$$

reemplazando por m, a—1, sacado de la igualdad anterior a=1+m, resulta

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\left(a-1+\frac{(\Delta x-1)\ (a-1)^2}{1.\ 2}\right.$$

$$\left.+\frac{(\Delta x-1)\ (\Delta x-2)\ (a-1)^3}{1.\ 2.\ 3.}+\ldots.\right)$$

Si pasamos al límite, haciendo $\Delta x=0$, se obtiene:

$$\text{L.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\ (a-1-\tfrac{1}{2}\ (a-1)^2+\tfrac{1}{3}\ (a-1)^3-\tfrac{1}{4}\ (a-1)^4+\ldots.)$$

ó cambiando la notación y representando la serie por A, nos resulta:

$$\frac{dy}{dx}=A\cdot a^x$$

9. Sea la función

$$y=\log x$$

y determinemos la derivada.

Podemos poner

$$x=a^y$$

llamando *a* la base de los logaritmos, y se tendrá conforme á lo anterior

$$\frac{dx}{dy}=A\ a^y \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{A}\cdot\ \frac{1}{a^y}=\frac{1}{A}\cdot\ \frac{1}{x}$$

Ya determinaremos fácilmente el valor de A, obtenido en los anteriores resultados, por medio de la fórmula de Mac Claurin.

PÁGINA 27.—DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES ANGULARES INVERSAS.

Sea

$$y=\text{arc. sev. vers. } x \ldots. (1)$$

ó

$$x=\text{sen. vers } y=1-\cos y \ldots. (2)$$

$$dx=\text{sen } y \, dy; \; dy=\frac{dx}{\text{sen } y}=\frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$=\frac{dx}{\sqrt{1-(1-x)^2}}=\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Diferenciar

$$y = \text{arc tang } x$$

se tiene

$$x=\text{tang } y, \; dx=\frac{dy}{\cos^2 y}, \; dy=\cos^2 y \, dx=\frac{dx}{1+\text{tang}^2 y}$$

$$=\frac{dx}{1+x^2}$$

De un modo semejante se podrán diferenciar otras funciones angulares inversas.

FÓRMULA DE MAC LAURIN.

1. Sea

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots.(1)$$

una función suceptible de desarrollarse en serie, siendo los coeficientes A, B, C, etc., independientes de x, vamos á determinarlos buscando las derivadas de distintas órdenes, y tendremos:

$$\frac{dy}{dx}=B+2\,Cx+3\,Dx^2+4\,Ex^3+\ldots.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\,C+2.\,3\,Dx+3.\,4\,Ex^2+$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=2.\,3.\,D.+2.\,3.\,4\,Ex+\ldots.$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=2.\,3.\,4.\,E+\ldots..$$

Suponiendo $x=0$, en la ecuación (1) y en las siguientes, representando por (y) el valòr que adquiere la función y por $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, etc., los que adquieren las distintas derivadas tendremos, después de sustituir por A, B y C, sus valores en (1), sacados de las diversas ecuaciones anteriores.

$$y=(y)+\left(\frac{dy}{dx}\right)x+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{x^3}{1.\,2.\,3}$$
$$+\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)\frac{x^4}{1.\,2.\,3.\,4}+\ldots.$$

Para aplicar esta fórmula no hay más que sacar las diversas derivadas de una función dada, y ver á lo que se reducen con la hipótesis de $x=o$, así como la función primitiva.

2. Determinamos como aplicación de la fórmula anterior la de Newton, y sea

$$y=(a+x)^m$$

diferenciando tendremos

$$\frac{dy}{dx}=m\,(x+a)^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m\,(m-1)\,(x+a)^{m-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m\,(m-1)\,(m-2)\,(x+a)^{m-3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(x+a)^{m-4}$$

.. ..

Si suponemos $x=o$, en la función primitiva y en las derivadas, tendremos

$$(y) = x^m$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = m\,a^{m-1}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = m\,(m-1)\,a^{m-2}$$

$$\left(\frac{d^3y}{ax^3}\right) = m\,(m-1)\,(m-2)\,a^{m-3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,x^{m-4}$$

....

llevando estos valores á la fórmula de Mac Laurin, queda

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}\,x$$

$$+\frac{m\,(m-1)\,a^{m-2}}{1.2}x^2 + \frac{m\,(m-1)}{1.\,2.\,3}(m-2)\,a^{m-}\,x^3 + \ldots.$$

3. Determinemos como segunda aplicación de la fórmula de Mac Claurin, la constante A de la expresión

$$\frac{d\,y}{d\,x} = A\,a^x$$

hallada en la derivación de $y = a^x$

Por las derivaciones sucesivas de

$$y = a^x$$

obtenemos

$$\frac{d\,y}{d\,x} = A\,a^x\,; \qquad \frac{d^2\,y}{d\,x^2} = A^2\,a^x\,;$$

$$\frac{d^3\,y}{d\,x^3} = A^3\,a^x$$

....

y suponiendo $x = 0$, resulta

$$(y) = 1;\ \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right) = A.\ \left(\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\right) = A^2\,;$$

$$\left(\frac{d^3\,y}{d\,x^3}\right) = A^3$$

....

por consiguiente

$$a^x = 1 + A\,x + \tfrac{1}{2}\,A^2\,x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}\,A^3\,x^3 + \ldots.$$

si suponemos que cuando

$$x = \frac{1}{A}, \quad e = a^x,$$

nos queda

$$e = a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots$$

tomando doce términos, resulta

$$e = a^{\frac{1}{A}} = 2,7182818$$

cantidad que representa la base del sistema de logaritmos hiperbólicos.

Si elevamos la igualdad anterior á la potencia A, produce:

$$e^{A} = a$$

de donde

$$A = \frac{\log a}{\log e}$$

tomando los logaritmos. Cuando los logaritmos son neperiamos la igualdad anterior se convierte en

$$A = L \log a$$

de consiguiente, la constante A, en este caso es igual al logaritmo neperiano de a

Como fácilmente se pasa de logaritmos neperiamos á vulgares y viceversa, conviene adoptar por las simplificaciones que introducen en los cálculos, los logaritmos neperianos.

Página 30.

1. Si las porciones (Fig. 1) A C y C B que parten del punto C de una curva, á la cual es tangente la línea O C M, es-

tán contenidas en el ángulo M O N, la curva es cóncava respecto de O N y convexa respecto de O C M.

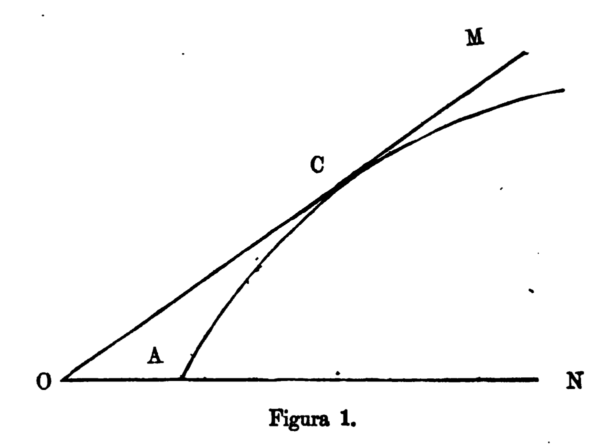


Figura 1.

Sea (Fig, 2) N R una porción de curva de la cual tratamos de averiguar cuáles son las condiciones analíticas que indican su convexidad ó concavidad respecto de la tangente N S T trazada en un punto N de la curva, y de consiguiente respecto del eje de las x.

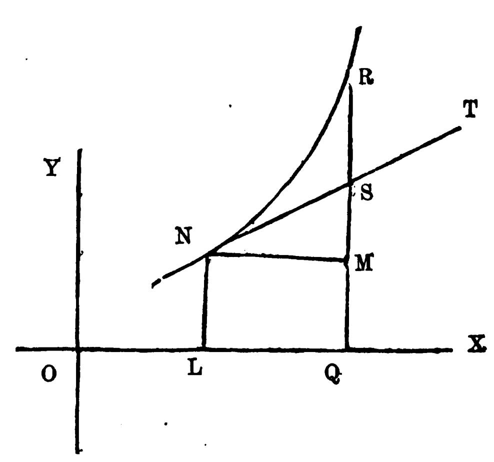


Figura 2.

Tenemos por la fórmula de Taylor

$$F(x+h) = F(x) + F'(x)\frac{h}{1} + F''(x)\frac{h^2}{1.2}$$

$$+ F'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots.$$

ó $$F(x+h) - F(x) - F'(x) = F''(x)\frac{h^2}{1.2}$$

$$+ F'''(x)\cdot\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots.$$

El primer miembro representa la línea R S, porque

$$F(x+h) = RQ,\ F(x) = NL = MQ$$

y $$SM = h \tang SMN = h F'(x)$$

Si suponemos que el incremento h de la abscisa 0 L es muy pequeño, el término

$$F''(x)\frac{h^2}{12},$$

valdrá más que los siguientes y decidirá en consecuencia del signo del resultado, ó del valor de R S.

Luego la curva es convexa hacia N T ó al eje de las x, *si el 2° coeficiente diferencial y la ordenada de la curva tienen el mismo signo*:

Si la ordenada de la curva y el 2° coeficiente diferencial tienen signos contrarios la curva vuelve su concavidad, hácia el eje de las x, *carácter opuesto al de la convexidad.*

Sin embargo, por medio de la (Fig. 3) se llega fácilmente á la conclusión anterior.

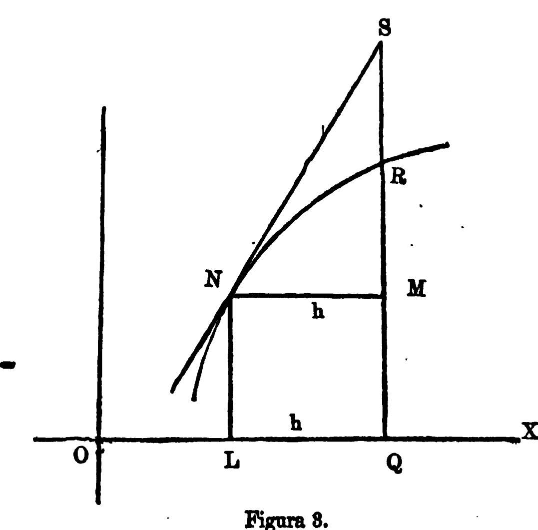


Figura 8.

En efecto

$$F(x+h) - \Big(F(x) + F'(x)\,h \Big)$$

$$= F''(x)\,\frac{h^2}{1.2} + F''(x)\,\frac{h^3}{1.2.4} + \ldots .$$

la cantidad del primer miembro es negativa puesto que es igual á R Q — S Q.

2. Examinar si la curva representada por

$$y = x - x^2 = x\,(1-x)$$

es cóncava ó convexa respecto al eje de las x.

Tendremos derivando

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 1-2\,x; \quad \frac{d^2\,y}{d\,x^2} = -\,2.$$

La ordenada para valores comprendidos entre cero y uno ó entre el origen y el punto en que corta la curva al eje de

las x, es positivo y la segunda derivada negativa, luego de 0 á B (Fig. 4) la curva es cóncava hacia el eje de las x. Para valores de x negativos ó superiores á uno, la ordenada y la segunda derivada son negativas, luego la parábola vuelve su convexidad hacia el eje de las x, para estos valores de las abcisas.

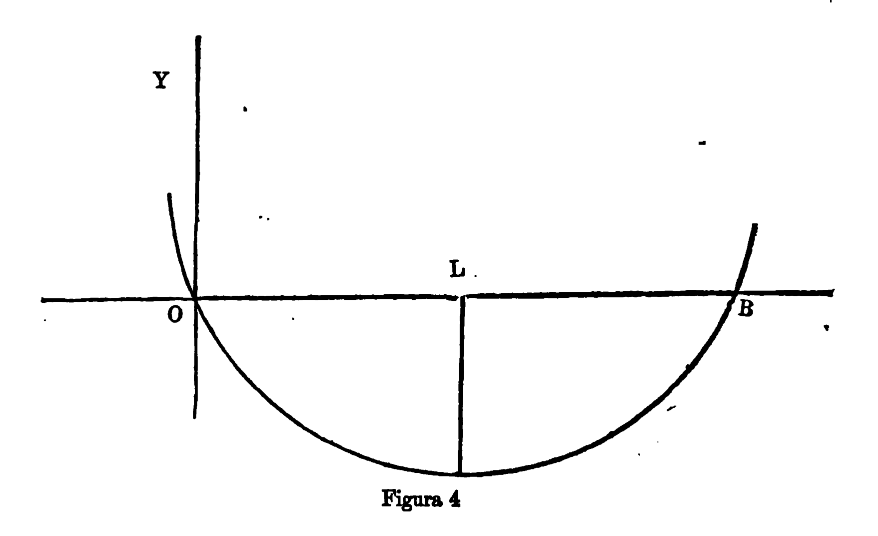


Figura 4

3. Cuando de convexa la curva se vuelve cóncava ó viceversa, el punto en que tiene lugar este cambio se designa con el nombre de punto de *inflexión.*

Claro es que cambiará de signo el segundo coeficiente diferencial al pasar de B N á N C (Fig. 5), siendo nulo para el punto N. Luego: *si nulificando el segundo coeficiente diferencial y aumentando* h *y quitando* h *á* x *en dicho coeficiente, hay cambio de signo en éste, habrá punto de inflexión; correspondiente á la abscisa hallada al nulificar la segunda derivada.*

Ejemplo.—Determinar si hay punto de inflexión en la curva representada por la ecuación

$$y = x^3 - x^4$$

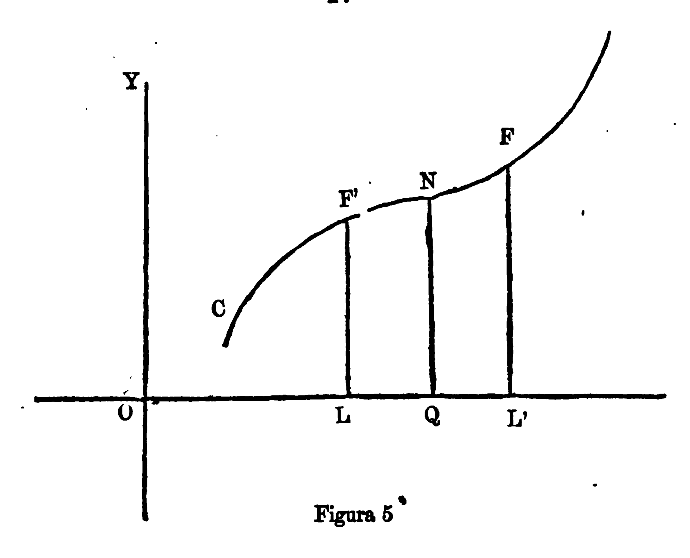


Figura 5ª

el primer coeficiente diferencial es:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 2\,x - 4\,x^3$$

siendo el segundo:

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = 2 - 12\,x^2.$$

Si igualamos á cero el segundo coeficiente, tenemos:

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{6}}$$

reemplazando en el segundo coeficiente por x, $\sqrt{\tfrac{1}{6}} + h$, y en seguida $\sqrt{\tfrac{1}{6}} - h$, en el primer caso se obtiene:

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = 2 - 12\,(\sqrt{\tfrac{1}{6}} + h)^2$$

$$= 2 - 2 - 24\sqrt{\tfrac{1}{6}}\;h - 12\,h^2 = -\,12\,h\,(\sqrt{\tfrac{1}{6}} - h)$$

resultado negativo, para h muy pequeño, como debe suponerse.

En el segundo caso, obtenemos:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = 2 - 12 \left(\sqrt{\tfrac{1}{6}} - h\right)^2$$

$$= 2 - 2 + 24 \sqrt{\tfrac{1}{6}}\, h - 12 h^2 = 12 h \left(\sqrt{\tfrac{1}{6}} - h\right)$$

valor positivo para h muy pequeño.

Luego para $x = \pm \sqrt{\tfrac{1}{6}}$ hay un punto de inflexión.

Máximos y Mínimos.

Cuando las ordenadas (Fig. 6) S H, F Q.... después de ir aumentando hasta N L, comienzan á decrecer, se dice que es máxima la ordenada N L que corresponde á la

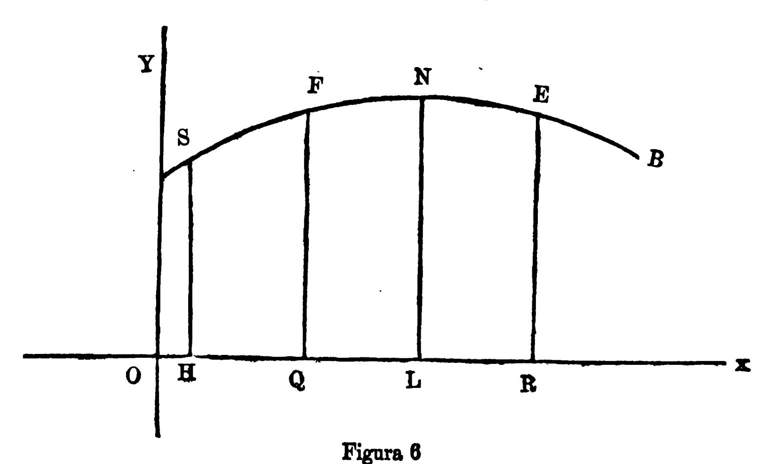


Figura 6

abscisa O L. Si por el contrario las ordenadas (Fig. 7) H S, F Q decrecen hasta N L y en seguida comienzan á aumentar se dice que la ordenada N L, correspondiente á la abscisa O L es mínima.

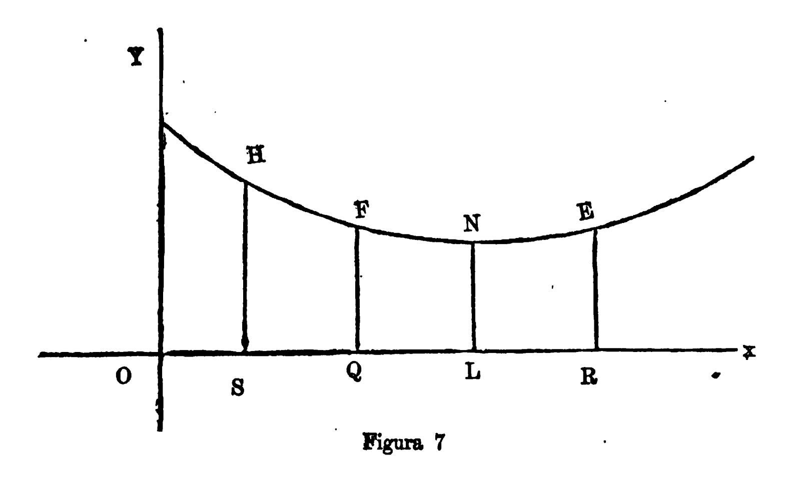


Figura 7

Vamos á investigar, mediante los coeficientes diferenciales, si se verifica el máximo ó el mínimo de una función.

Tenemos, fórmula de Taylor

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)\,h + F''(x)\frac{h^2}{1.2}$$

$$+ F'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$F(x-h) - F(x) = -F'(x)\,h + F''(x)\frac{h^2}{1.2}$$

$$- F'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Supongamos (Fig. 6), que á derecha é izquierda de L se tome h; F (x+h) será R E, y F (x—h) será F Q. En el caso del máximo los primeros miembros de las dos igualdades anteriores, serán negativos y en el caso del mínimo, serán positivos; pero dando á h un valor muy pequeño el signo de los segundos miembros será el que tenga el primer término, es decir, que tendríamos un resultado positivo y otro negativo, y de consiguiente no habría ni

máximo ni mínimo; resulta pues, *que tanto en uno como en otro caso, el primer coeficiente tiene que nulificarse. Si el segundo coeficiente resulta negativo hay máximo para la ordenada y mínimo si resulta positivo.*

En el caso de que se busque el máximo ó el mínimo de la abscisa, bastará suponer á x como la función y á *y* como la variable y determinar los coeficientes

$$\frac{d\,x}{d\,y} \qquad \frac{d^2\,x}{d\,y^2}.$$

Pudiera suceder que el primer coeficiente no se pudiera nulificar, entonces se examina si el tercero puede hacerse cero; en general, se ve si el de orden impar puede ser nulo.

3. Examinemos si existe ordenada máxima en la curva representada por

$$y = x^2 - x^4$$

Tenemos;

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 2\,x - 4\,x^3; \quad \frac{d^2\,y}{d\,x^2} = 2 - 12\,x^2$$

igualando á cero el primer coeficiente, resulta:

$$x\,(2-4\,x^2) = 0$$

de donde

$$x = 0, \quad x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

si sustituimos en el segundo coeficiente estos valores, tendremos:

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = 2; \quad \frac{d^2\,y}{d\,x^2} = 2 - 6 = -4$$

luego para $x = 0$, existe un mínimo en el origen y para

$$x = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

existen dos ordenadas máximas, que se obtienen, sustituyendo en la ecuación de la curva los valores

$$x = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{2}$$

y resulta $y = \frac{1}{4}$. La curva en cuestión está representada en la (Fig. 8). Vuelve la concavidad hacia el eje de las x, desde el origen hasta los puntos B y C, porque la ordenada de la curva y el segundo coeficiente diferencial tienen signos contrarios para valores de x, comprendidos entre cero y más ó menos uno; siendo más uno y menos uno los valores que se obtienen haciendo en la ecuación de la curva la ordenada nula.

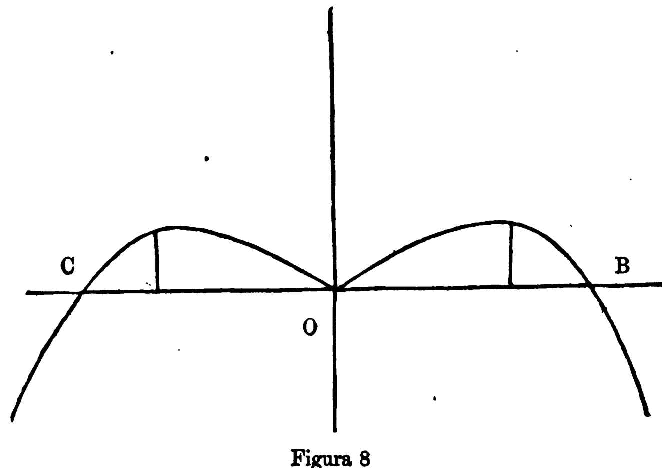


Figura 8

Para valores de x, mayores que uno ó menores que menos uno, la ordenada de la curva y el segundo coeficiente diferencial tienen el mismo signo negativo, luego la curva desde B en adelante es convexa lo mismo que desde C.

4. Determinar el máximo ó el mínimo* de los valores que puede tener el trinómio $m x^2 + n x + p$.

* Ya sabemos que una expresión se dice que es máxima cuando sobrepasa á los valores anteriores y posteriores correspondientes á x, y mínima en el caso contrario.

Supongamos primeramente á m positivo y pongamos

$$y = m x^2 + n x + p$$

de donde

$$\frac{d y}{d x} = 2 m x + n; \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = 2 m x$$

igualando á cero el primer coeficiente diferencial y despejando á x, se tiene:

$$x = -\frac{n}{2 m}$$

como $m > 0$ el segundo coeficiente es positivo y de consiguiente, hay un mínimo para *y*, correspondiente á

$$x = -\frac{n}{2 m},$$

ó sea:

$$y = \frac{m n^2}{4 m^2} - \frac{n^2}{2 m} + p = p - \frac{n^2}{4 m^2}$$

2°. Si $m < 0$, el segundo coeficiente es negativo y por lo mismo habrá un máximo correspondiente á

$$x = \frac{n}{2 m},$$

que se obtiene fácilmente.

Los anteriores resultados los hemos encontrado en la Geometría Analítica cuando buscamos el valor máximo de

$$y = \pm \frac{1}{2 A} \sqrt{-m x^2 + n x + p}$$

y el mínimo de

$$y = \pm \frac{1}{2A} \sqrt{m x^2 + n x + p.}$$

cuando son imaginarias las raíces del trinómio.

Es evidente que tanto el máximo como el mínimo de las anteriores expresiones, no cambiarán si prescindimos de los radicales y del factor $\frac{1}{2A}$. Puede hacerse extensiva esta observación á otro caso, lo cual abrevia la investigació de los máximos y mínimos.

5. Teorema de Fermat.

¿Qué recta debe seguir un punto luminoso para ir de A á B, en el menor tiempo posible?

Supongamos (Fig. 9), C D sea la línea de separación de los medios en que la luz se propaga refractándose y M N la normal á C y D. Lllamemos a y b las velocidades del punto luminoso en los dos medios.

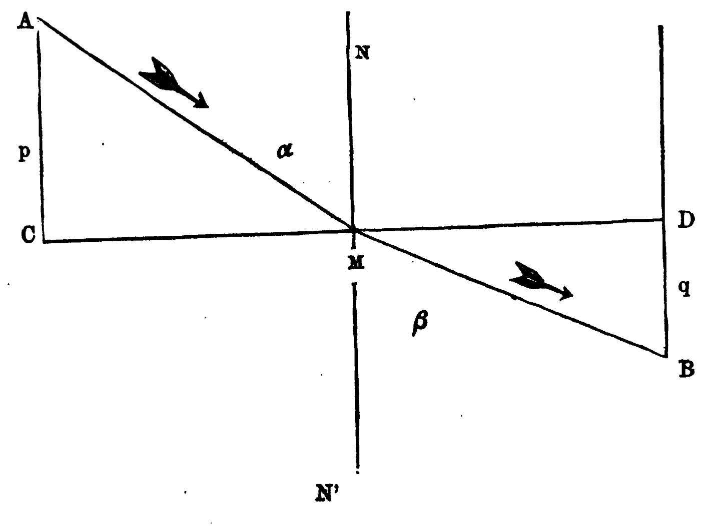


Figura 9

El camino recorrido por el punto laminoso con movimiento uniforme es A M B, compuesto de A M y M B, por lo que tendremos, según la fórmula del movimiento uniforme, que es, e = v t.

$$T = \frac{A\,M}{a} + \frac{B\,M}{b} = \frac{p}{a \cos \alpha} + \frac{q}{b \cos \beta} \;\ldots.\; (1)$$

poniendo por A M y B M sus valores, siendo p = A C, q=B D, α = A M N, ángulo de incidencia y β = N' M B, ángulo de refracción.

Además

$$C\,D = r = p \tang \alpha + q \tang \beta \;\ldots.\; (2)$$

pero haciendo d T = o, que es la primera diferencial, y diferenciando (1) y (2), resulta:

$$\frac{p \operatorname{sen} \alpha.\, d\,\alpha}{a \cos^2 \alpha} + \frac{q \operatorname{sen} B.\, d B}{b \cos^2 B} = o$$

$$\frac{p\, d\,\alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{q\, d\,\beta}{\cos^2 \beta} = 0,$$

se deduce de las anteriores ecuaciones

$$\frac{d\,\alpha}{d\,\beta} = -\frac{a\,q \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \beta}{p \operatorname{sen} \alpha\, b \cos^2 \beta};\; \frac{d\,\alpha}{d\,\beta} = -\frac{q \cos^2 \alpha}{p \cos^2 \beta}$$

de donde,

$$\frac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha} = 1$$

ó bien

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{a}{b} \quad (M)$$

Luego: *la relación de los senos de los ángulos de incidencia y de refracción es constante.* Cambia esta relación ó índice de refracción con el medio refrigente.

Si en la ecuación anterior

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = y \ldots. \text{ constante } (H)$$

Suponemos $a = b$, la velocidad de los rayos siendo la misma no se verifica la refracción; pero colocándose una superficie reflejante, donde antes se refractaban los rayos, es decir, en la superficie de separación de los medios, habrá reflexión y entonces se tendrá:

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\beta \quad \text{ó} \quad \alpha = \beta$$

(Fig. 10), luego el ángulo de incidencia es igual al de refracción. Una de las leyes de Descartes acerca de la reflexión.

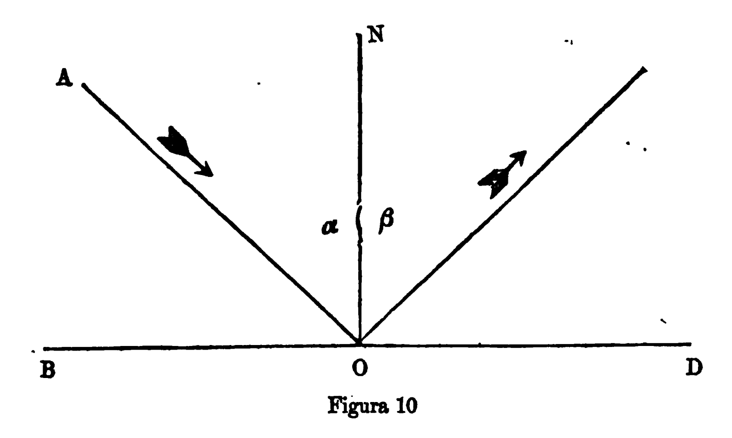


Figura 10

Siendo la ecuación de los óvalos de Descartes

$$\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = y \; \ldots . \text{ constante (M)*}$$

gozarán los puntos de las curvas representadas por la an terior ecuación de la propiedad expresada por (H).

Si suponemos que $a=b=1$ en [M] nos queda:

$$u + v = y$$

ecuación de la elipse.

Luego en la elipse son iguales los ángulos α y β, que la normal D M forma con los radios rectores, trazados al pun-

* Geometría Analítica (pág. 29).

to M. Ya se comprende que S T es la recta que en el caso de la (Fig. 10) es B D, y M D la normal N O.

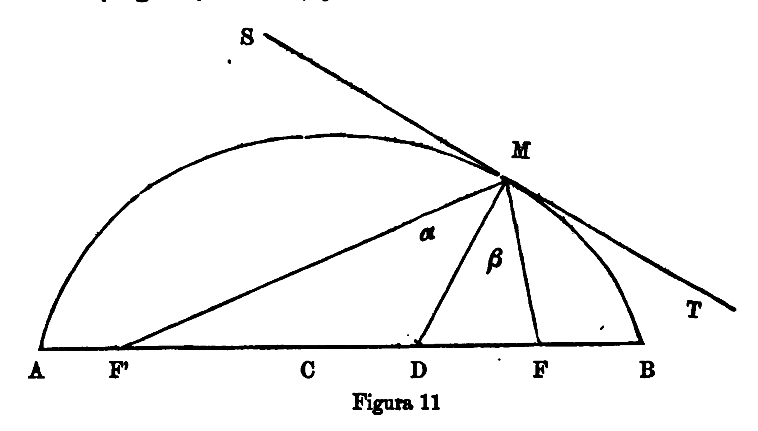


Figura 11

6. Determinar el cono de menor volúmen inscrito á una esfera.

Sea (Fig 12), A C B el cono inscrito á la esfera, se tiene

$$V = \frac{1}{3} \pi \, A Q^2 \, C Q = \frac{1}{3} \pi x^2 y$$

los triángulos semejantes A Q C y C O N, dan;

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{N C} = \frac{r}{\sqrt{y (y-2 r)}}$$

porque

$$N C = \sqrt{y^2 - 2 r y}$$

puesto que es N C media proporcional entre C Q y C E.

De la igualdad anterior se deduce, obtiene:

$$x = \frac{r y}{\sqrt{y (y-2 r)}}$$

substituyendo en la expresión del volumen, queda:

$$V = \frac{1}{3} \pi \frac{r^2 y^2}{y^2 - 2 r y} = \frac{1}{3} \pi \frac{r^2 y^2}{y - 2 r}$$

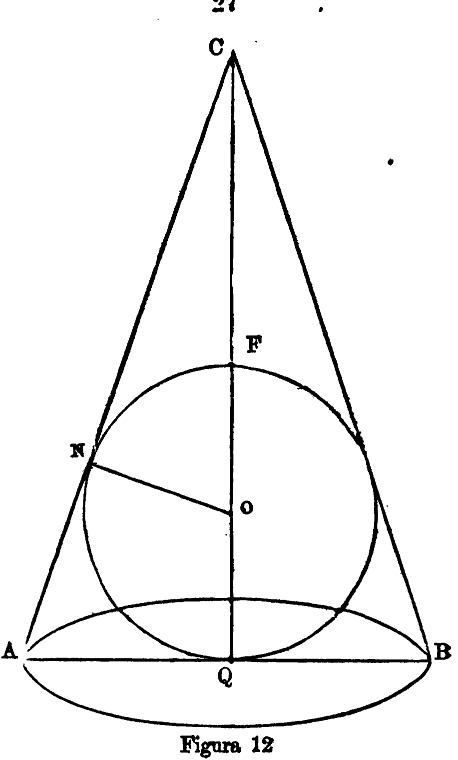


Figura 12

$$\frac{d\,V}{d\,y} = \frac{1}{3}\,\pi\,\frac{\left[\,(y-2\,r)\,2\,r^2\,y-r^2\,y^2\,\right]}{(y-2\,r)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\,\pi\,\frac{r^2\,(y^2-4\,r\,y)}{(y-2\,r)^2}$$

$$\frac{d^2\,V}{d\,y^2} = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2\,\frac{\left(\,(y-2\,r)^2\,(2y-4\,r)-(y^2-4\,r\,y)\,2\,(y-2\,r\,\right)}{(y-2\,r)^4}$$

$$= \frac{8}{3}\,\pi\,r^3\,\frac{1}{(y-2\,r)^3}$$

si el primer coeficiente lo hacemos igual con cero, resulta:

$$y = 4\,r$$

sustituido este valor en el segundo coeficiente da un resultado positivo, luego existe un mínimo: el valor de y sustituido en el de x, da:

$$x = r\sqrt{2}$$

y los valores de x y de y sustituidos en la expresión del volúmen, dan:

$$y = \frac{8}{3}\pi r^3$$

lo que manifiesta que el volúmen del cono pedido es el doble de la superficie de la esfera.

Circunscribir en un círculo un triángulo de mínima superficie.

Debe obtenerse un triángulo equilátero.

7. Construir la curva representada por la ecuación

$$y^2 = x^2 - x^4. \quad [1]$$

despejando á y, queda:

$$y = \pm\sqrt{x^2.(1-x^2)}$$

como para un valor de x, positivo ó negativo menor que uno, resultan dos para y, iguales y de signos contrarios, se infiere que la curva es simétrica respecto del eje de las x.

Para un valor de $x>1$ resultan los valores de y imaginarios, luego la curva es cerrada y limitada y no se extiende en el sentido de las abscisas (Fig. 13) más allá de los puntos A y B que corresponden á más uno y menos uno. Pasa por el origen porque la ecuación (1) se verifica por $x=0$ é $y=0$.

El primer coeficiente diferencial de la ecuación (1), es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-2x^3}{\sqrt{x^2(1-x^2)}} = \pm\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En el origen el coeficiente diferencial se reduce á ± 1,

luego en este punto las tangentes á la curva son bisectrices de los ángulos que forman los ejes.

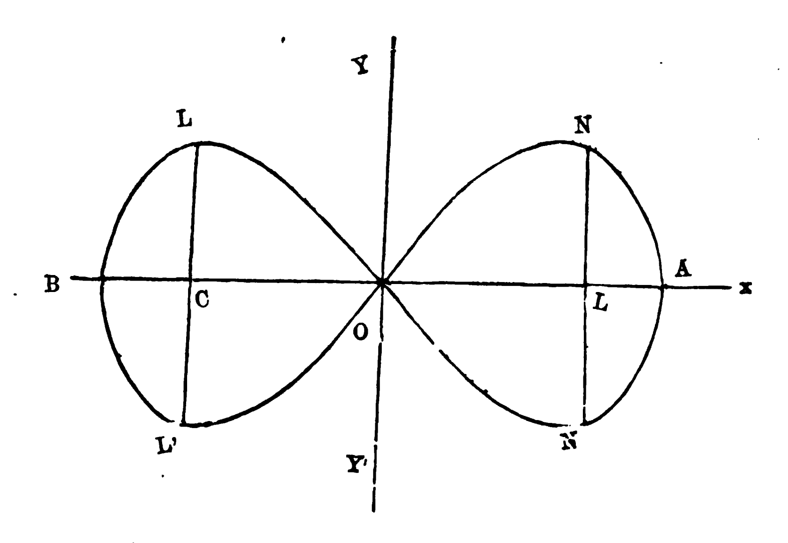


Figura 13

el segundo coeficiente diferencial es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{\sqrt{1-x^2}\ x \times 4x - (1-2x^2)\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \pm \frac{-4x(1-x^2) + (1-2x^2)x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{2x^3-3x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \pm \frac{x(2x^2-3)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

Nos bastará, con lo dicho anteriormente, considerar el signo superior del 2° coeficiente; como éste coeficiente, para valores de x entre cero y uno, resulta negativo, se infiere que la porción de la curva o N A es cóncava hácia el eje de las x.

Igualando á cero el primer coeficiente diferencial resulta

$$1-2x^2=0 \quad ó \quad x=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}=\pm 0.7$$

si sustituimos el valor de x en el segundo coeficiente diferencial, éste resulta negativo; se infiere que existe una ordenada máxima para $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, que se determina llevando á la ecuación (1) este valor de x.

Hecha la sustitución queda

$$y=\pm\tfrac{1}{2}.$$

La curva, teniendo en cuenta la simetría de sus puntos estará representada por la (Fig. 13).

Página 48.

Determinar la área del círculo, representado por

$$y=\sqrt{r^2-x^2}$$

La fórmula para la determinación de las áreas es

$$S=\int y\,dx$$

sustituyendo el anterior valor de *y* nos queda

$$S=\int\sqrt{r^2-x^2}.\,dx$$

aplicando la fórmula, de la integración por partes

$$\int u\,d\,v=u\,v-\int v\,d\,u$$

resulta haciendo $u=\sqrt{r^2-x^2}$; $d\,v=dx$, y diferenciando

$$u=\sqrt{r^2-x^2}$$

resulta

$$\int\sqrt{r^2-x^2}.dx = \sqrt{r^2-x^2}.x + \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \quad \ldots. \ (1)$$

por otra parte

$$\int\sqrt{r^2-x^2} = \int\frac{r^2\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} - \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \quad \ldots.. \ (2)$$

multiplicando y dividiendo

$$\int\sqrt{r^2-x^2}.dx\,,$$

por $\sqrt{r^2-x^2}$

Si sumamos (1) y (2), resulta:

$$2\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \sqrt{r^2-x^2}.x + \int\frac{r^2\,dx}{r^2-x^2}$$

$$\text{ó} \quad S=\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}.x + \tfrac{1}{2}r^2 \text{ arc sen vers} = \frac{x}{r} + C.$$

suponiendo que la área se cuenta desde el origen, $C=0$ y tendremos:

$$S=\tfrac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}.x + \tfrac{1}{2}r^2 \text{ arc sen vers} = \frac{x}{r}$$

si se supone $x=r$

se obtiene

$$S = \frac{\pi\, r^2}{4}$$

para la cuarta parte de la área del círculo y para todo el círculo

$$S = \pi\, r^2.$$

PÁGINA 50.

Calcular la área del lemniscato representado por

$$y^2 = x^2 - x^4$$

sustituyendo el valor positivo de y en la expresión

$$S = \int y\, d\, x$$

resulta:

$$S = \int (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} x\, d\, x$$

nos queda, valiéndonos de una variable auxiliar (pág. 42)

$$S = -\tfrac{1}{2} \,.\, \tfrac{2}{3}\, (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C = -\tfrac{1}{3}\, (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

para determinar la constante, hagamos sucesivamente x, cero y uno, y restamos del segundo resultado el primero, con lo que se hallará $C = \frac{1}{3}$. El valor uno es el que corresponde á la mayor abscisa. Obtendremos para la área:

$$S = \frac{1 - (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

PÁGINA 52.

Rectificar el arco de la parábola semicúbica

$$y^2 = a\,x^3$$

substituyendo el valor $d\,y^2$, en

$$z = \int (d\,x^2 + d\,y^2)^{\frac{1}{2}}$$

que es:

$$dy^2 = \tfrac{9}{4}\,a\,x\,d\,x^2$$

esulta:

$$z = \int (d\,x^2 + \tfrac{9}{4}\,a\,x\,d\,x^2)^{\frac{1}{2}} = \int (1 + \tfrac{9}{4}\,a\,x)^{\frac{1}{2}}\,d\,x \;\ldots.\; (1)$$

haciendo

$$1 + \frac{9\,a\,x}{4} = u,$$

re obtiene:

$$\frac{9\,a}{4}\,d\,x = d\,u \qquad \text{ó} \qquad d\,x = \frac{4}{9\,a}.\,d\,u$$

substituyendo en [1], queda:

$$z = \frac{4}{9\,a}\int u^{\frac{1}{2}}\,d\,u = \frac{8}{27\,a}\,u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$z = \frac{8}{27\,a}\,u^{\frac{3}{2}} + C$$

y poniendo por u su valor, se obtiene:

$$z = \frac{8}{27\,a}\left(1 + \frac{9\,a\,x}{4}\right)^{3} + C$$

Contando la integral desde el origen

$$C = -\frac{8}{27a},$$

por lo que

$$z = \frac{8}{27a}\left(1 + \frac{9}{4}a\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}a$$

Luego para integrar la expresión, (1) en que el factor que está fuera del paréntesis, es la diferencial del que está dentro con diferencia de constante y signo, puede aplicarse la siguiente regla: *auméntanse en una unidad el exponente del binómio y divídase éste por el producto del exponente así aumentado multiplicado por el de la variable interior y por su coeficiente.*

Página 53.

Calcular la superficie del elipsoide prolongado, es decir, del sólido producido por la elipse que gira al rededor de su eje principal.

Tenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

substituyendo este valor en

$$S = 2\pi \int y\,(d\,x^2 + d\,y^2)^{\frac{1}{2}}$$

y poniendo por d y^2 y por y sus valores resulta:

$$S = \frac{2b\pi}{a}\int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)^{-1}x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\,x$$

$$S = \frac{2\pi b}{a} \int \left(\frac{a^2 (a^2 - x^2) + b^2 x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\,x$$

ó $$= 2\pi \frac{b}{a} \int \left(\frac{a^4 - c^2 x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} d\,x$$

ó bien, por último, poniendo por c, a e, se obtiene:

$$S = 2\pi b \int \left(1 - \frac{e^2}{a^2} x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\,x.$$

No tendríamos más que hacer el desarrollo del binomio é integrar cada uno de los términos por la regla de la (Página 39) y tomar la integral entre los límites + a y — a, obteniéndose por último:

$$S = 4\pi a b \left(1 - \frac{e^2}{2.\,3} - \frac{3\,e^4}{2.\,4.\,5} - \frac{3\,e^6}{2.\,4.\,6.\,7} - \ldots\right)$$

para superficie de todo el elipsoide.

DIVERSAS AUXILIARES.

1. *Por el método de los límites se determina la auxiliar de un arco de curva plana, de la siguiente manera:*

Sea O Q la abcisa del punto T [Fig. 14], que incrementamos en $\Delta\,x = Q\,R$, tracemos T L paralela al eje de las x, y la cuerda T N, se tiene:

$$T\,N = \sqrt{\Delta\,x^2 + N\,L^2} \ldots . \ [1]$$

pero $$N\,L = f\,(a + \Delta x) - f\,(x)$$

$$= F'\,(x)\,\frac{\Delta\,x}{1} + F''\,(x)\,\frac{\Delta\,x^2}{1.\,2} + \ldots$$

representado por A, B, C, etc., los coeficientes de las diversas potencias de Δx, y substituyendo en [1] el valor de $N L^2$, queda:

$$T N = \sqrt{\Delta x^2 + F'^2(x) \Delta x^2 + A \Delta x^3 + B \Delta x^4 + \ldots}$$

$$\text{ó} \quad \frac{T N}{\Delta x} = \sqrt{1 + F'^2(x) + A \Delta x + B \Delta x^2 + \ldots}$$

pasando al límite; llamando z al arco T N y cambiando la notación, resulta:

$$\frac{d z}{d x} = \sqrt{1 + \frac{d y^2}{d x^2}} \quad \text{ó} \quad d z = \sqrt{d x^2 + d y^2}$$

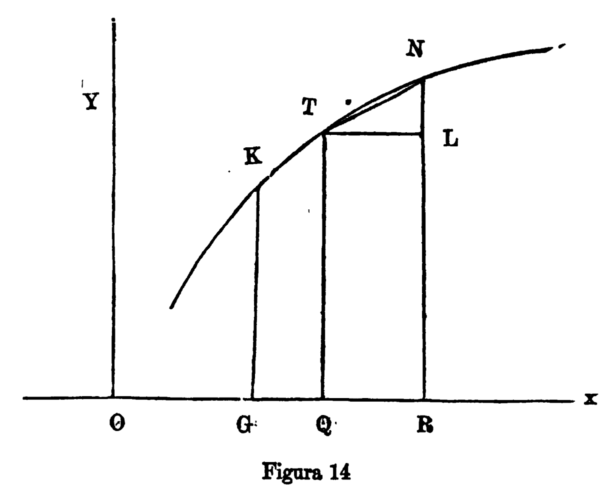


Figura 14

2. *La auxiliar de la área de una curva plana se obtiene por el método de los límites del siguiente modo:*

Incrementando, [Fig. 14] la abcisa O Q en $\Delta x = Q R$, a área G K T Q, se incrementará en T Q R N $= \Delta S$, y si consideramos que la relación entre un arco y su cuerda,

en el caso del límite, es la unidad,* ó son iguales ambas magnitudes, también podremos afirmar que la relación entre el trapecio mixtilíneo Q T N R y el rectilíneo Q T N R, será la unidad en el caso del límite, ó se podrá tomar el primero por el segundo; pero éste tiene por área

$$\Delta S = \tfrac{1}{2} (y + y + F'(x) \frac{\Delta x}{1} + F''(x) \frac{\Delta x^2}{1.\ 2} + \ldots.) \Delta x$$

dividiendo por Δ x, y pasando al límite, nos resulta:

$$L. \frac{\Delta S}{\Delta x} = y \quad ó \quad d S = y d x.$$

3. *La auxiliar de una superficie de revolución la encontramos por el método de los límites adoptando la siguiente marcha:*

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, se puede suponer, que en el caso del límite, la área engendrada por el trapecio mixtilíneo (Fig. 14) y la producida por el rectilíneo girando ambas al rededor del eje de las x, tienen por límite la unidad, y en consecuencia se podrá tomar por la primera la segunda, que tiene por expresión

---

* Se sabe por la trigonometría que

$$\text{límite de } \frac{a}{\text{sen } a} = 1$$

en el caso de $a = 0$

ó bien limite de $\frac{2\,a}{2 \text{ sen } a} = 1$

es decir, relación límite entre el arco 2 a y la cuerda 2 sen a igual á la unidad.

$$\Delta S = \left[\pi y + \pi \left(y + F'(x) \frac{\Delta x^2}{1}\right.\right.$$

$$\left.\left. + F''(x) \frac{\Delta x^2}{1.2} + \ldots\ldots\right) \right] \Delta z$$

llamando z la cuerda T N, que reemplaza á el arco T N.

Pasando al límite, haciendo $\Delta x = 0$, resulta:

$$L . \Delta S = 2 \pi y . \Delta z$$

ó $$d S = 2 \pi y d z = 2 \pi y \sqrt{d x^2 + d y^2} .$$

poniendo por d z, su valor.

4. *La auxiliar de un volúmen de revolución la encontramos por el método de los límites de la siguiente manera:*

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente y suponiendo, como antes, que giren al rededor del eje de las x los trapecios mencionados, tendremos para el volúmen producido por el rectilíneo Q T N R [Fig. 14]

$$\Delta V = \frac{1}{3} \left[\pi y^2 + \pi \left(y + \frac{\Delta x}{1} F'(x) + \frac{\Delta x^2}{1.2} F''(x) + \ldots \right)^2 \right.$$

$$\left. + \pi y \left(y + \frac{\Delta x}{1} F'(x) + \frac{\Delta x^2}{1.2} F''(x) + \ldots \right) \right] \nabla x$$

pasando al límite nos queda:

$$L \frac{\Delta V}{\Delta x} = \pi y^2 \quad \text{ó} \quad d V = \pi y^2 d x.$$

Escolio. Por lo expuesto se comprenderá que la base de que partimos para determinar las diversas auxiliares, no

es otra que la de suponer que en el caso del límite: *la relación entre el arco y la cuerda es la unidad*, y puede, en consecuencia, tomarse la cuerda por el arco. Es precisamente lo que hacemos en la geometría elemental para rectificar la circunferencia, ó hallar la superficie del círculo. Es la consideración que hemos hecho, empleando el método de los infinitamente pequeños, en las nociones de cálculo Infinitesimal, para rectificar un arco, determinar una área, etc.

La solidaridad, la uniformidad de la ciencia geométrica, en todas sus partes es inconcusa, como en las grandes y pequeñas creaciones, la naturaleza es semejante á sí misma. El método de las infinitamente pequeños y el de los límites se confunden en el fondo y se distinguen en la forma, ó sea en el mecanismo de las operaciones de cálculo.

Isaac Newton y Godofredo Guillermo Leibniz, grandes genios científicos, el uno creador del método de los límites y el otro de los infinitamente pequeños, sintetizaron las ideas del momento histórico en que existieron, aprovechando el trabajo colectivo de sus contemporáneos; pero estas ideas eran unas mismas, las correspondientes á la época científica del siglo XVIII. La Sociedad Real de Londres* fué injusta con Leibniz, á quien calificó de pla-

---

* La Universidad de Pisa fué también *enemiga* del célebre Galileo, creador de la dinámica. Sostenían los universitarios, con Aristóteles á la cabeza, que, *dos cuerpos de la misma materia, pero de pesos diferentes cayendo de la misma altura, el más pesado llega primero á la tierra, con una velocidad proporcional á su peso;* así es que, un cuerpo de diez kilógramos, debe descender con una velocidad diez veces mayor, que otro que pese un kilógramo y llegar á la tierra en la décima parte del tiempo empleado por el cuerpo que pesa un kilógramo.

Galileo, observador concienzudo é inteligente de la Naturaleza, fundador del método experimental, para evidenciar el error de los peripatéticos mencionados, dejó caer desde la altura de la inclinada y artística torre de Pisa, cuerpos de pesos desiguales; *que cayeron á la vez, produ-*

giario de Newton; pero la posteridad ha dado "al César lo que es del César y á Dios lo que es de Dios," declarando que el autor de las fluxiones y el autor de los infinitamente pequeños, por senderos distintos llegaron á un mismo fin.

Fermant, notabilísimo matemático de Tolosa, emprendió el mismo trabajo de los filósofos citados, siguiendo á Descartes, el Newton francés; pero no profundizó sus estudios, y dejó escapar de sus manos la gloria del gran descubrimiento del cálculo diferencial.

DIFERENCIALES BINÓMIAS.

Las diferenciales binomias, se presentan con bastante frecuencia en los cálculos, y vamos á determinar las condiciones de integrabilidad de estas expresiones, cuya forma comunmente es la siguiente:

$$dy = x^m (a + b x^n)^{\frac{p}{q}} dx \ldots . \ (1)$$

m y n son enteros y n además positivo.

---

ciendo un ruido al llegar á la tierra, ruido que servía para marcar la duración de la caída.

La experiencia no podía ser más concluyente y contraria á las aseveraciones anteriores. Motivo por el cual, los miembros de la Universidad declararon la guerra al sabio florentiuo, guerra de escuela á escnela, guerra secundada más tarde por la Inquisición, tribunal anticientífico, con motivo de la rotación de la tierra al rededor del Sol, centro de nuestro sistema planetario, rotación que nadie pone hoy en duda, que todos repetimos "E pour se move."

Galileo, lo mismo que Leibniz, ha sido absuelto por sus pósteros; absuelto "post mortem," pero ha sido absuelto.

He aquí los capítulos de condenación contra sus adversarios de Pisa, contra la escuela escolástica de la edad media, suscritos por la filosofía científica.

1ª. *Todos los cuerpos caen en el vacío con igual velocidad.*

2ª. *Los espacios recorridos por un cuerpo que parte del estado de reposo, son proporcionales á los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos.*

3ª. *La velocidad adquirida por un cuerpo que cae en el vacío es proporcional al tiempo empleado en su descenso.*

Si fueren m y n fraccionarios, por medio de una variable auxiliar cuyo exponente fuera igual al menor múltiplo de los denominadores obtendríamos una expresión semejante á (1), si n fuese negativo empleando una variable auxiliar recíproca de x, conseguiríamos igualmente reducir el caso al anterior, así como si se nos presentara en los dos términos del binómio la variable, fácilmente la podríamos dejar en uno solo.

Si hacemos en (1)

$$a + b x^n = u^q$$

se obtiene:

$$x^n = \frac{u^q - a}{b}; \quad x = \left(\frac{u^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$x^m = \left(\frac{u^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}};$$

$$d x = \frac{1}{n b}\left(\frac{u^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n} - 1} q u^{q-1} d u$$

sustituyendo estos resultados en (1), queda:

$$dy = \frac{q}{n b}\left(\frac{u^q - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n} - 1} u^{p+q-1} du.$$

luego si

$$\frac{m + 1}{n},$$

da un número entero la expresión (1), será integrable, porque sus términos serán de la forma $c x^h d x$, en consecuencia: *cuando el exponente de la variable exterior en la expresión* (1) *aumentado en una unidad es exactamente di-*

visible por el exponente de la variable interior, será integrable la diferencial binomia.

Si en la expresión (1) sacamos á x^m fuera del paréntesis, nos queda:

$$d\,y = x^{m+\frac{np}{q}} \left(\frac{a}{x^n} + b\right)^{\frac{p}{q}} d\,x$$

$$= x^{m+\frac{np}{q}} \left(a\,x^{-n} + b\right)^{\frac{p}{q}} d\,x$$

que será integrable, teniendo en cuenta lo anterior, cuando

$$\frac{m + \frac{np}{q} + 1}{n} \quad \text{ó} \quad \frac{m+1}{n} + \frac{p}{q}$$

sea un número entero, ó bien: se *podrá integrar una diferencial binomia, cuando el exponente de la variable exterior aumentado en una unidad y dividido por el exponente de la variable interior al paréntesis, dé una cantidad que sumada con el exponente del binómio produzca un número entero.*

Aclaremos lo expuesto resolviendo los siguientes ejercicios.

1°. Integrar la expresión:

$$y = 5\int x^3 \left(a + b\,x^2\right)^{\frac{3}{2}} d\,x \;\ldots.\; (A)$$

en virtud de la primera de las dos reglas anteriores será integrable la diferencial dada; haciendo:

$$a + b\,x^2 = u^2$$

tendremos:

$$x = \pm \left(\frac{u^2 - a}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x^3 = \pm \left(\frac{u^2 - a}{b} \right)^{\frac{3}{2}}; \qquad d\,x = \frac{u}{b \left(\frac{u^2 - a}{b} \right)^{\frac{1}{2}}}\, du$$

sustituyendo en (A), queda:

$$y = \pm 5 \int \left(\frac{u^2 - a}{b} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{u^4\, du}{b \left(\frac{u^2 - a}{b} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \pm \frac{5}{b} \int \left(\frac{u^2 - a}{b} \right) u^4\, d\,u$$

ó $$y = \pm \frac{5}{b^2} \int u^6 du \mp \frac{5}{b^2} \int a\, u^4 du$$

é integrando y poniendo por u su valor, resulta:

$$y = \pm 5 \frac{(a + b\,x^2)^{\frac{7}{2}}}{7\, b^2} \mp \frac{(a^2 + b\,x^2)^{\frac{5}{2}}}{b^2} + C.$$

2°. Integremos:

$$y = \int x^3 \,(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\,x \; \ldots ,\ (B)$$

haciendo

$$r^2 - x^2 = u^2$$

resulta

$$x = (r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}; \quad x^3 = (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$d\,x = -\,(r^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}}\, u\, du$$

sustituyendo en (B), queda:

$$y = -\int \frac{(r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} u^{-1} u}{(r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} du = -\int (r^2 - u^2)\, du$$

$$= -\int r^2\, du + \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} - r^2 u + C$$

$$= \frac{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - r^2 (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

ó bien

$$y = -\tfrac{1}{3} (2\, r^2 + x^2)(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

3°. Integrar la expresión diferencial

$$d\, y = \frac{d\, x}{x^4 \sqrt{1 - x^2}} = x^{-4} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d\, x$$

$$= x^{-5} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} d\, x \; \ldots . \; (C)$$

será exactamente integrable, según la primera regla que hemos dado. La segunda regla puede reducirse á la primera, como en el ejemplo por resolver, sacando á x^2, fuera del paréntesis.

Hagamos:

$$\frac{1}{x^2} - 1 = u^2 \quad ó \quad x^{-2} - 1 = u^2; \quad x^{-2} = 1 + u^2$$

de donde:

$$- x^3\, d\, x = u\, d\, u$$

multiplicando las dos últimas igualdades, tendremos:

$$- x^{-5}\, d\, x = (1 + u^2)\, u\, d\, u$$

sustituyendo este último valor y $\frac{1}{x^2} - 1$, en C, queda:

$$d\,y = = (1+u^2)\,u\,u^{-1}\,du = -(1+u^2)\,du$$

integrando, resulta:

$$y = -u - \tfrac{1}{3}u^3 + C$$

poniendo por u, su valor

$$u = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

resulta:

$$y = -\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

ó $$y = -\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\right] + C$$

$$= -\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\,x^2+1}{3\,x^2}\right) + C$$

$$= -\left(\frac{1+2\,x^2}{3\,x^3}\right)\sqrt{1-x^2} + C.$$

4°. Como último ejercicio, determinemos la integral de

$$z = \frac{1}{p}\int (p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\,d\,y \;\ldots\ldots (1)$$

que nos dará el arco rectificado de una parábola común.

Integrado por partes, valiéndonos de la fórmula

$$\int u\,d\,v = u\,v - \int v\,d\,u$$

tendremos:

$$z = \frac{1}{p}\int (p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\,y - \int \frac{y^2\,d\,y}{\sqrt{p^2+y^2}} \quad \ldots. \; (2)$$

y si multiplicamos y dividimos (1), por

$$(p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

nos queda

$$z = \frac{1}{p}\int \frac{p^2\,d\,y}{\sqrt{p^2 + y^2}} + \frac{1}{p}\int \frac{y^2\,d\,y}{\sqrt{p^2+y^2}} \quad \ldots. \; (3)$$

sumando (2) y (3), se obtiene:

$$z = \frac{(y^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{2\,p} + \frac{1}{2\,p}\int \frac{p^2}{(p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

pero

$$\frac{1}{2p}\int \frac{p^2}{(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2p}\,\mathrm{Log}\left[y + (p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

según vimos (Pág. 41).

Luego

$$z = \frac{y\,(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{2\,p} + \frac{1}{2\,p}\,\mathrm{Log}\left[y + (p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\right] + C.$$

si contamos el arco desde el origen, $C = 0$ por lo que

$$z = \frac{y(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{2p} + \frac{1}{2p} \text{ Log} \left[y + (p^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Procediendo como lo hemos hecho para integrar las diferenciales binomias, hemos evitado el empleo de fórmulas más ó menos complicadas y difíciles de retener en la memoria, como las que aplican varios autores de Cálculo.

ÍNDICE.